جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشگاه صنعتی اصفهان

@JOZVE_IUT

@JOZVE_IUT

ریاضی مهندسی

(بخش اول، آنالیز فوریه و معادلات با مشتقات جزئی)

(ترم تابستانی ۱۳۹۳)

دکتر بیژن طائری
دانشکده‌ی علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی اصفهان

خلاصه فصل ۱، سری فوریه مثلثاتی، سری فوریه سینوسی و کسینوسی
جلسه‌های اول و دوم ۱۶ و ۱۷ تیرماه ۱۳۹۳

فرض کنید $pc(a,b)$ مجموعه‌ی همه‌ی توابع پیوسته‌ی قطعه‌ای حقیقی روی فاصله‌ی بسته‌ی $[a,b]$ باشد. اگر f و g دو تابع پیوسته‌ی قطعه‌ای روی $[a,b]$ باشند، حاصل‌ضرب داخلی f و g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

خواص ضرب داخلی: (α عدد حقیقی)

$$(f,g)=(g,f) \qquad , \qquad (f,g+h)=(f,g)+(f,h) \qquad , \qquad (\alpha f,g)=\alpha(f,g).$$

نُرم تابع $f(x)$ عبارت است از

$$\|f\|=(f,f)^{۱/۲}=\left(\int_a^b [f(x)]^۲\,dx\right)^{۱/۲}.$$

تابع f را یکه گوییم هرگاه $\|f\|=۱$. توجه کنید به ازای هر تابع f، اگر $\|f\|\neq ۰$، آن‌گاه $\frac{f}{\|f\|}$ تابع یکه است. توابع f و g را متعامد گوییم هرگاه

$$(f,g)=۰.$$

یک مجموعه از توابع پیوسته‌ی قطعه‌ای روی $[a,b]$ را متعامد گوییم، هرگاه اعضای آن دوبه‌دو بر هم عمود باشند، یعنی به ازای هر دو تابع متمایز f و g در این مجموعه داشته باشیم $(f,g)=۰$.

فرض کنید $V=\{\varphi_n(x)\}_{n=۱}^{\infty}$ یک مجموعه‌ی متعامد در $pc(a,b)$ باشد. سری فوریه‌ی $f(x)$ را به صورت

$$\sum_{n=۱}^{\infty} C_n\varphi_n(x)$$

تعریف می‌کنیم، که در آن

$$C_n=\frac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^۲}.$$

اعداد C_n را ضرایب سری فوریه‌ی f می‌نامیم. در حالت کلی ممکن است سری فوریه‌ی $f(x)$ همگرا نباشد، یا در صورت همگرایی به $f(x)$ همگرا نباشد. برای نشان دادن وابسته بودن این سری (و نه همگرایی) به تابع $f(x)$ می‌نویسیم

$$f\sim\sum_{n=۱}^{\infty} C_n\varphi_n, \qquad C_n=\frac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^۲}.$$

مثال ۱. *دنباله‌ی توابع*

$$\{۱,\cos nx,\sin nx\}_{n=۱}^{\infty}=\{۱,\cos x,\cos ۲x,\cos ۳x,\ldots,\sin x,\sin ۲x,\sin ۳x,\ldots\}$$

در $[-\pi,\pi]$ *متعامد است و* $\|\cos nx\|=\|\sin nx\|=\sqrt{\pi}$ *و* $\|۱\|=\sqrt{۲\pi}$.

سری فوریه تابع f نسبت به مجموعه‌ی متعامد $\{1, \cos nx, \sin nx\}$ را سری فوریه‌ی مثلثاتی تابع f نامیم. سری فوریه مثلثاتی f عبارت است از

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

که در آن

$$a_0 = \frac{(f, 1)}{\|1\|^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \quad \text{و} \quad a_n = \frac{(f(x), \cos nx)}{\|\cos nx\|^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$$

$$b_n = \frac{(f(x), \sin nx)}{\|\sin nx\|^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx.$$

قضیه ۲. *فرض کنید f یک تابع تناوبی با دوره‌ی تناوب 2π باشد. اگر مشتقات چپ و راست f در x وجود داشته باشد، آن‌گاه سری فوریه‌ی مثلثاتی f در x به $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ همگرا است، یعنی*

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

به ویژه اگر f در x پیوسته باشد، سری فوریه‌ی مثلثاتی f در x به $f(x)$ همگرا است، یعنی

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

فرض کنید $V = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ یک مجموعه‌ی متعامد در $pc(a, b)$ باشد و $f = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\varphi_n$. با این فرض که انتگرال مجموع نامتناهی برابر مجموع انتگرال‌ها باشد، به دست می‌آوریم

$$(f, f) = \left(f, \sum_{n=1}^{\infty} C_n\varphi_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(f, \varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \|\varphi_n\|^2$$

و در نتیجه

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \|\varphi_n\|^2 .$$

تساوی بالا به تساوی پارسوال معروف است. از تساوی پارسوال نتیجه می‌گیریم که سری $\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \|\varphi_n\|^2$ همگرا است، و از آن بلافاصله به دست می‌آید $\lim_{n\to+\infty} C_n \|\varphi_n\| = 0$.

قضیه ۳. *تساوی پارسوال برای سری فوریه‌ی هر تابع پیوسته‌ی قطعه‌ای f نسبت به مجموعه‌ی متعامد مثلثاتی*

$$\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$$

در فاصله‌ی $[-\pi, \pi]$ برقرار است، یعنی

$$\|f\|^2 = a_0^2 \|1\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 \|\cos nx\|^2 + b_n^2 \|\sin nx\|^2)$$

چون $\|1\|^2 = 2\pi$ و $\|\sin nx\|^2 = \|\cos nx\|^2 = \pi$، داریم

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\, dx = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

از سری فوریه می‌توان جمله به جمله انتگرال و مشتق گرفت:

قضیه ۴. *فرض کنید $f(x)$ یک تابع پیوسته‌ی قطعه‌ای در فاصله‌ی $[-\pi, \pi]$ باشد. آن‌گاه از سری فوریه‌ی f، یعنی*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

چه همگرا باشد و چه همگرا نباشد می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت، یعنی به ازای هر a و b داریم

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b a_0\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,dx.$$

هم‌چنین اگر توسیع تناوبی $f(x)$ تابع پیوسته و تکه‌ای هموار باشد، آن‌گاه با مشتق‌گیری جمله به جمله از سری فوریه‌ی

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

سری فوریه‌ی $f'(x)$ به دست می‌آید، یعنی

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-na_n \sin nx + nb_n \cos nx). \quad \blacksquare$$

دنباله‌ی $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0, \pi]$ متعامد است و $\|\sin nx\|^2 = \frac{\pi}{2}$. سری فوریه‌ی تابع پیوسته‌ی قطعه‌ای $f(x)$ در $[0, \pi]$ نسبت به این مجموعه را سری فوریه‌ی سینوسی f می‌نامیم. بنابراین

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx; \qquad b_n = \frac{(f, \sin nx)}{\|\sin nx\|^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

هم‌چنین دنباله‌ی $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$ در $[0, \pi]$ متعامد است و $\|1\|^2 = \pi$ و $\|\cos nx\|^2 = \frac{\pi}{2}$. سری فوریه‌ی تابع پیوسته‌ی قطعه‌ای $f(x)$ در $[0, \pi]$ نسبت به این مجموعه را سری فوریه‌ی کسینوسی f می‌نامیم. بنابراین

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

$$a_0 = \frac{(f, 1)}{\|1\|^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx \quad \text{و} \quad a_n = \frac{(f(x), \cos nx)}{\|\cos nx\|^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

سری فوریه‌ی سینوسی و هم‌چنین سری فوریه‌ی کسینوسی f در x به $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ همگرا است.

تساوی پارسوال f نسبت به مجموعه‌ی متعامد $\{1, \cos nx\}_{n=1}^{\infty}$، در $(0, \pi)$ عبارت است از

$$\|f\|^2 = a_0^2\,\|1\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\,\|\cos nx\|^2,$$

یعنی تساوی پارسوال برای سری فوریه‌ی کسینوسی $f(x)$ به صورت زیر است

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

هم‌چنین عبارت $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\,\|\sin nx\|^2$، تساوی پارسوال f نسبت به مجموعه‌ی متعامد $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$، در $(0, \pi)$ است.

پس تساوی پارسوال برای سری فوریه‌ی سینوسی $f(x)$ عبارت است از

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x)]^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

چند مثال

مثال ۵. *نشان دهید دنباله‌ی توابع* $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty} = \{\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots\}$ *در* $[-\pi, \pi]$ *متعامد است و نرم هر کدام از توابع را بیابید.*

حل اگر $n \neq m$، آن‌گاه با توجه به این نکته که $\sin nx \sin mx$ تابع زوج است و با استفاده از رابطه‌ی مثلثاتی $\sin nx \sin mx = \frac{1}{2}[\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]$، داریم

$$\begin{aligned}(\sin nx, \sin mx) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \ \sin mx \, dx \\ &= 2\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] \, dx \\ &= \left[\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x - \frac{1}{n+m}\sin(n+m)x\right]_{0}^{\pi} \\ &= 0.\end{aligned}$$

بنابراین دنباله‌ی داده شده متعامد است. اکنون نرم هر کدام از اعضای دنباله را می‌یابیم. چون

$$\begin{aligned}\|\sin nx\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx \\ &= \int_{0}^{\pi} (1 - \cos 2nx) \, dx \\ &= \left[x - \frac{1}{2n}\sin 2nx\right]_{0}^{\pi} \\ &= \pi\end{aligned}$$

خواهیم داشت $\|\sin nx\| = \sqrt{\pi}$. ■

مثال ۶. *نشان دهید دنباله‌ی توابع* $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty} = \{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots\}$ *در* $[-\pi, \pi]$ *متعامد است و نرم هر کدام از توابع را بیابید.*

حل اگر $n \neq m$، آن‌گاه با توجه به این نکته که $\cos nx \cos mx$ تابع زوج است و با استفاده از رابطه‌ی مثلثاتی $\cos nx \cos mx = \frac{1}{2}[\cos(n-m)x + \cos(n+m)x]$، داریم

$$\begin{aligned}(\cos nx, \cos mx) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx \\ &= 2\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} [\cos(n-m)x + \cos(n+m)x] \, dx \\ &= \left[\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x + \frac{1}{n+m}\sin(n+m)x\right]_{0}^{\pi} \\ &= 0.\end{aligned}$$

بنابراین دنباله‌ی داده شده متعامد است. اکنون نرم هر کدام از اعضای دنباله را می‌یابیم. برای حالت $n = ۰$ داریم

$$\|۱\|^۲ = \int_{-\pi}^{\pi} ۱\, dx = ۲\pi.$$

پس $\|۱\| = \sqrt{۲\pi}$. برای حالت $n \neq ۰$ داریم

$$\begin{aligned}\|\cos nx\|^۲ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^۲ nx\, dx \\ &= \int_{۰}^{\pi} (۱ + \cos ۲nx)\, dx \\ &= \left[x + \frac{۱}{۲n}\sin ۲nx\right]_{۰}^{\pi} \\ &= \pi.\end{aligned}$$

بنابراین $\|\cos nx\| = \sqrt{\pi}$. ■

دو مثال بالا نشان می‌دهند که دنباله‌های $\{\sin nx\}_{n=۱}^{\infty}$ و $\{\cos nx\}_{n=۰}^{\infty}$، علاوه بر فاصله‌ی $[-\pi, \pi]$، بر فاصله‌ی $[۰, \pi]$ نیز متعامد هستند.

مثال ۷. *نشان دهید دنباله‌ی توابع*

$$\{۱, \cos nx, \sin nx\}_{n=۱}^{\infty} = \{۱, \cos x, \cos ۲x, \cos ۳x, \ldots, \sin x, \sin ۲x, \sin ۳x, \ldots\}$$

در $[-\pi, \pi]$ متعامد است و نرم هر کدام از توابع را بیابید.

حل در مثال‌های ۵ و ۶ دیدیم به ازای هر $n \neq m$،

$$(\sin nx, \sin mx) = ۰ \qquad \text{و} \qquad (\cos nx, \cos mx) = ۰.$$

علاوه بر آن داریم $\|\sin nx\| = \|\cos nx\| = \sqrt{\pi}$ و $\|۱\| = \sqrt{۲\pi}$. پس تنها باید ثابت کنیم که $(\sin nx, \cos mx) = ۰$. این مطلب نیز واضح است، زیرا $\sin nx \cos mx$ تابعی فرد است،

$$(\sin nx, \cos mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\, dx = ۰.$$

از این‌رو مجموعه‌ی داده شده متعامد است. ■

مثال ۸. *سری فوریه تابع*

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & -\pi < x < ۰ \\ ۱ & ۰ \leq x < \pi, \end{cases} \qquad f(x + ۲\pi) = f(x)$$

را بیابید و همگرایی آن‌را مشخص کنید.

(آ) نشان دهید $\frac{\pi}{۴} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{۲n - ۱}$.

(ب) با استفاده از تساوی پارسوال نشان دهید $\frac{\pi^۲}{۸} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲n - ۱)^۲}$.

(پ) مقدار سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$ *را بیابید.*

حل ضرایب سری فوریه‌ی $f(x)$ را می‌یابیم. a_0 عبارت است از

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} dx = \frac{1}{2}.$$

اکنون a_n و b_n را محاسبه می‌کنیم

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{\sin nx}{n\pi}\Big]_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx = -\frac{\cos nx}{n\pi}\Big]_0^{\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}.$$

پس سری فوریه‌ی f عبارت است از

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{\pi n}\sin nx.$$

چون

$$1-(-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ 2 & \text{فرد } n \end{cases}$$

خواهیم داشت

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

از طرف دیگر داریم

$$\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)] = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

بنابراین

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

(آ) اگر در عبارت بالا قرار دهیم $x = \frac{\pi}{2}$، چون $\sin\frac{(2n-1)\pi}{2} = (-1)^{n+1}$، داریم

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1,$$

که نتیجه می‌دهد

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

(ب) تساوی پارسوال برای $f(x)$ را می‌یابیم. ابتدا سمت چپ تساوی پارسوال را می‌یابیم:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx = 1$$

پس تساوی پارسوال برای $f(x)$ عبارت است از

$$۱ = ۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ + \sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۲}{\pi(۲n-۱)}\right)^۲ \implies \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴}{\pi^۲(۲n-۱)^۲} = \frac{۱}{۲}$$
$$\implies \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n-۱)^۲} = \frac{\pi^۲}{۸}.$$

(پ) با جدا کردن جملات زوج و فرد در سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$ می‌توان نوشت

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲} = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n-۱)^۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n)^۲}.$$

از این‌رو با استفاده از (ب) خواهیم داشت

$$\frac{۳}{۴}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲} = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n-۱)^۲} = \frac{\pi^۲}{۸}.$$

در نتیجه

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲} = \frac{\pi^۲}{۶}. \quad \blacksquare$$

در مثال بعد سری‌های یافته شده در مثال بالا را با استفاده از یک تابع دیگر می‌یابیم.

مثال ۹. *(آ) سری فوریه تابع $f(x) = x$، $-\pi < x \leq \pi$، را بیابید.*

(ب) مقدار سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۲n-۱}$ را محاسبه کنید.

(پ) مقدار سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$ را محاسبه کنید.

حل ابتدا ضرایب سری فوریه‌ی $f(x) = x$ را می‌یابیم. با توجه به این که تابع $f(x) = x$ یک تابع فرد است داریم

$$a_۰ = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = ۰ \qquad \text{و} \qquad a_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = ۰.$$

اکنون b_n را با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx \\
&= \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} x\sin nx\,dx \\
&= \frac{۲}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^۲}\right]_{۰}^{\pi} \\
&= \frac{۲}{\pi}\left(\frac{-\pi\cos n\pi}{n}\right) \\
&= \frac{۲}{\pi}\frac{-\pi(-۱)^n}{n} \\
&= \frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n}.
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

و سری فوریه‌ی $f(x) = x$ عبارت است از

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \qquad -\pi < x < \pi.$$

(ب) به ویژه اگر قرار دهیم $x = \frac{\pi}{2}$، آن‌گاه چون

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ (-1)^{k+1} & n = 2k-1, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

داریم

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin n\frac{\pi}{2} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{2k-1+1}}{2k-1}(-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} = -\frac{\pi}{4}.$$

(پ) برای یافتن تساوی پارسوال برای $f(x) = x$ ابتدا انتگرال زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\, dx &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{3}\pi^2. \end{aligned}$$

در نتیجه تساوی پارسوال برای $f(x) = x$ عبارت است از

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\pi^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\right)^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}. \end{aligned}$$

از این‌رو نتیجه‌ای آشنا را داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad \blacksquare$$

مثال ۱۰. (آ) سری فوریه تابع $f(x) = x^{۲}$، $-\pi < x < \pi$، $f(x + ۲\pi) = f(x)$، را بیابید.

(ب) مقدار سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n^{۲}}$ را محاسبه کنید.

(پ) مقدار سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{۴}}$ را محاسبه کنید.

حل ابتدا ضرایب سری فوریه‌ی $f(x) = x^{۲}$ را می‌یابیم. با توجه به این که تابع $f(x) = x^{۲}$ یک تابع زوج است داریم

$$b_n = \frac{۱}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = ۰.$$

$a_۰$ عبارت است از

$$a_۰ = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^{۲}\, dx = \frac{۱}{\pi} \int_{۰}^{\pi} x^{۲}\, dx = \frac{\pi^{۲}}{۳}.$$

اکنون a_n را با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{۱}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^{۲} \cos nx\, dx \\ &= \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{\pi} x^{۲} \cos nx\, dx \\ &= \frac{۲}{\pi} \left[x^{۲} \frac{\sin nx}{n} + ۲x \frac{\cos nx}{n^{۲}} - ۲\frac{\sin nx}{n^{۳}} \right]_{۰}^{\pi} \\ &= \frac{۲}{\pi} \left[۲\pi \frac{\cos n\pi}{n^{۲}} \right] \\ &= \frac{۴(-۱)^n}{n^{۲}}. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$a_n = \frac{۴(-۱)^n}{n^{۲}}$$

و سری فوریه‌ی $f(x) = x^{۲}$ عبارت است از

$$x^{۲} = \frac{\pi^{۲}}{۳} + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۴(-۱)^n}{n^{۲}} \cos nx, \qquad -\pi \le x \le \pi.$$

(ب) به ویژه اگر قرار دهیم $x = ۰$، آن‌گاه داریم

$$۰ = \frac{\pi^{۲}}{۳} + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۴(-۱)^n}{n^{۲}}$$

و در نتیجه

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n^{۲}} = -\frac{\pi^{۲}}{۱۲}.$$

همچنین اگر قرار دهیم $x = \pi$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} \pi^{۲} &= \frac{\pi^{۲}}{۳} + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۴(-۱)^n}{n^{۲}} \cos n\pi \\ &= \frac{\pi^{۲}}{۳} + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۴}{n^{۲}} \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲} = \frac{\pi^۲}{۶}$$

که با مثال قبل مطابقت دارد.

(پ) برای یافتن تساوی پارسوال برای $f(x) = x^۲$ ابتدا انتگرال زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}
\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^۲\,dx &= \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^۴\,dx \\
&= \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} x^۴\,dx \\
&= \frac{۲}{۵}\pi^۴.
\end{aligned}$$

در نتیجه تساوی پارسوال برای $f(x) = x^۲$ عبارت است از

$$\begin{aligned}
\frac{۲}{۵}\pi^۴ &= ۲\left(\frac{\pi^۲}{۳}\right)^۲ + \sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۴(-۱)^n}{n^۲}\right)^۲ \\
&= \frac{۲\pi^۴}{۹} + \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱۶}{n^۴}.
\end{aligned}$$

از این‌رو

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۴} = \frac{\pi^۴}{۹۰}. \quad \blacksquare$$

برای آزمودن قضیه‌ی ۴ از دو سری فوریه، مشتق و انتگرال می‌گیریم. در مثال ۱۰ دیدیم

$$x^۲ = \frac{\pi^۲}{۳} + \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴(-۱)^n}{n^۲}\cos nx.$$

اگر از دو طرف رابطه‌ی بالا مشتق بگیریم داریم

$$\begin{aligned}
۲x &= \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴(-۱)^n}{n^۲}(-n\sin nx) \\
&= \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴(-۱)^{n+۱}}{n}\sin nx.
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$x = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n}\sin nx,$$

که با مثال ۹ مطابقت دارد. پس اگر تابع $f(x)$ مشتق‌پذیر باشد و از سری فوریه‌ی تابع $f(x)$ مشتق‌پذیر مشتق بگیریم سری فوریه $f'(x)$ به دست می‌آید.

هم‌چنین می‌توان از سری فوریه‌ی یک تابع جمله به جمله انتگرال گرفت. مثلا اگر از سری فوریه $f(x) = x$، یعنی

$$t = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n}\sin nt,$$

از $-\pi$ تا x انتگرال بگیریم داریم

$$\int_{-\pi}^{x} t\,dt = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n} \int_{-\pi}^{x} \sin nt\,dt.$$

از این‌رو

$$\begin{aligned}
\left.\frac{t^۲}{۲}\right]_{-\pi}^{x} &= \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n} \left[\frac{-\cos nt}{n}\right]_{-\pi}^{x} \\
&= \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲(-۱)^{n}}{n^۲} (\cos nx - \cos(-n\pi)) \\
&= \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲(-۱)^{n}}{n^۲} \cos nx - \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲(-۱)^{n}}{n^۲} (-۱)^n \\
&= \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲(-۱)^{n}}{n^۲} \cos nx - ۲\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}
\end{aligned}$$

و در نتیجه، چون $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲} = \frac{\pi^۲}{۶}$، به دست می‌آوریم

$$\frac{x^۲}{۲} - \frac{\pi^۲}{۲} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲(-۱)^{n}}{n^۲} \cos nx - \frac{\pi^۲}{۳}$$

و در نتیجه

$$x^۲ = \pi^۲ - \frac{۲\pi^۲}{۳} + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۴(-۱)^{n}}{n^۲} \cos nx.$$

پس

$$x^۲ = \frac{\pi^۲}{۳} + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۴(-۱)^{n}}{n^۲} \cos nx$$

که با نتیجه مثال ۱۰ مطابقت دارد.

مثال ۱۱. *سری فوریه سینوسی و سری فوریه کسینوسی تابع $f(x) = x$، $۰ < x < \pi$ را بیابید و با استفاده از آن‌ها مجموع سری‌های $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$، $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲n-۱)^۲}$، $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲n-۱)^۴}$، و $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۴}$ را محاسبه کنید.*

حل ابتدا سری فوریه‌ی سینوسی $f(x) = x$ را می‌یابیم. داریم (مثال ۹ را ببینید)

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{\pi} x \sin nx\,dx \\
&= \frac{۲}{\pi} \left[\frac{-x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^۲}\right]_{۰}^{\pi} \\
&= \frac{۲}{\pi} \frac{\pi(-۱)^{n+۱}}{n} \\
&= \frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n},
\end{aligned}$$

و در نتیجه سری فوریه‌ی سینوسی $f(x)$ عبارت است از

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \qquad 0 < x < \pi.$$

برای یافتن تساوی پارسوال ابتدا محاسبه می‌کنیم

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} [f(x)]^2\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\, dx = \frac{2}{3}\pi^2.$$

پس تساوی پارسوال برای سری فوریه‌ی سینوسی $f(x)$ عبارت است از

$$\frac{2}{3}\pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\right)^2$$

و در نتیجه

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

که نتیجه‌ای آشنا است. برای یافتن سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

اکنون سری فوریه‌ی کسینوسی $f(x) = x$ را می‌یابیم. ابتدا a_0 را محاسبه می‌کنیم

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\, dx = \frac{\pi}{2}$$

و سپس a_n را با استفاده از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\, dx\\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}\\ &= \frac{2}{\pi n^2}[\cos n\pi - 1]\\ &= \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}.\end{aligned}$$

در نتیجه سری فوریه‌ی کسینوسی $f(x)$ عبارت است از

$$x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2}\cos nx, \qquad 0 < x < \pi.$$

اگر در سری فوریه کسینوسی $f(x) = x$ قرار دهیم $x = ۰$ خواهیم داشت

$$۰ = \frac{\pi}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲((-۱)^n - ۱)}{\pi n^۲}$$

که نتیجه می‌دهد

$$-\frac{\pi^۲}{۴} = \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{-۲}{(۲k-۱)^۲}$$

و بنابراین نتیجه‌ی زیر، که در بالا نیز به دست آوردیم، حاصل می‌شود

$$\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲k-۱)^۲} = \frac{\pi^۲}{۸}.$$

تساوی پارسوال برای سری فوریه‌ی کسینوسی $f(x)$ عبارت است از

$$\frac{۲}{۳}\pi^۲ = ۲(\frac{\pi}{۲})^۲ + \sum_{n=۱}^{\infty} \left(\frac{۲((-۱)^n - ۱)}{\pi n^۲}\right)^۲ = \frac{\pi^۲}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۸(۱ - (-۱)^n)}{\pi^۲ n^۴}.$$

در نتیجه

$$\frac{۲}{۳}\pi^۲ - \frac{\pi^۲}{۲} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۸(۱-(-۱)^n)}{\pi^۲ n^۴} \implies \frac{\pi^۴}{۴۸} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲}{(۲n-۱)^۴}$$
$$\implies \frac{\pi^۴}{۹۶} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲n-۱)^۴}.$$

برای یافتن سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۴}$ می‌نویسیم

$$\begin{aligned}\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۴} &= \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲n-۱)^۴} + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲n)^۴} \\ &= \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲n-۱)^۴} + \frac{۱}{۱۶}\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۴}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{۱۵}{۱۶}\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۴} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲n-۱)^۴}$$

و در نتیجه، چون $\frac{\pi^۴}{۹۶} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲n-۱)^۴}$، داریم

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۴} = \frac{۱۶}{۱۵}\frac{\pi^۴}{۹۶} = \frac{\pi^۴}{۹۰}. \quad \blacksquare$$

مثال ۱۲. *با انتگرال‌گیری از سری فوریه‌ی کسینوسی $f(x) = x$، $۰ < x < \pi$، سری فوریه‌ی سینوسی $g(x) = x^۲ - \pi x$ را محاسبه کنید و با استفاده از آن مجموع سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۶}$ را بیابید.*

حل سری فوریه‌ی کسینوسی $f(x) = x$، که در مثال قبل به دست آمد، را می‌نویسیم

$$t = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos nt$$

و از صفر تا x از آن انتگرال می‌گیریم. در این صورت خواهیم داشت

$$\int_0^x t\,dt = \int_0^x \frac{\pi}{2}\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos nt\,dt$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{x^2}{2} = \frac{\pi}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^3} \sin nx.$$

بنابراین

$$x^2 - \pi x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^n - 1)}{\pi n^3} \sin nx.$$

از این‌رو سری فوریه‌ی سینوسی تابع $g(x) = x^2 - \pi x$، $0 < x < \pi$ را یافتیم. حال تساوی پارسوال را برای سری فوریه سینوسی $g(x)$ می‌یابیم. ابتدا محاسبه می‌کنیم

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [g(x)]^2\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x^2 - \pi x)^2\,dx = \frac{\pi^4}{15}.$$

پس تساوی پارسوال برای سری فوریه‌ی سینوسی $g(x)$ عبارت است از

$$\frac{\pi^4}{15} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4((-1)^n - 1)}{\pi n^3} \right)^2$$

و در نتیجه

$$\frac{\pi^6}{15 \times 16 \times 2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^6}$$

یعنی

$$\frac{\pi^6}{480} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^6}$$

و داریم

$$\frac{\pi^6}{960} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6}.$$

اکنون برای محاسبه‌ی مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ جملات زوج و فرد آن جدا می‌کنیم

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^6} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} + \frac{1}{64} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\left(1 - \frac{1}{64}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

و داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{64}{63}\frac{\pi^6}{960}=\frac{\pi^6}{945}. \quad \blacksquare$$

مثال ۱۳. *سری فوریه سینوسی و سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)=e^{2x}$، $0<x<\pi$ را بیابید.*

حل ضرایب سری فوریه‌ی سینوسی $f(x)=e^{2x}$ عبارتند از

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^{2x}\sin nx\,dx=\frac{2e^{2x}(-n\cos nx+2\sin nx)}{\pi(n^2+4)}\Bigg]_0^{\pi}=\frac{2n(e^{2\pi}(-1)^{n+1}+1)}{\pi(n^2+4)},$$

و داریم

$$e^{2x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(e^{2\pi}(-1)^{n+1}+1)}{\pi(n^2+4)}\sin nx.$$

همچنین ضرایب سری فوریه‌ی کسینوسی $f(x)=e^{2x}$ عبارتند از

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{2x}=\frac{1}{2\pi}e^{2x}\Bigg]_0^{\pi}=\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi};\\ a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^{2x}\cos nx\,dx=\frac{2e^{2x}(2\cos nx+n\sin nx)}{\pi(n^2+4)}\Bigg]_0^{\pi}=\frac{4(e^{2\pi}(-1)^n-1)}{\pi(n^2+4)}\end{aligned}$$

و داریم

$$e^{2x}=\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(e^{2\pi}(-1)^n-1)}{\pi(n^2+4)}\cos nx. \quad \blacksquare$$

خلاصه فصل ۲، انتگرال فوریه و کاربردهای آن
جلسه سوم ۲۲ تیرماه ۱۳۹۳

فرض کنید که $f(x)$ یک تابع پیوسته‌ی قطعه‌ای روی فاصله‌ی $(-\infty,+\infty)$ باشد و $f(x)$ در $(-\infty,+\infty)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد، یعنی

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$$

وجود داشته باشد. انتگرال فوریه تابع $f(x)$ عبارت است از

$$f(x) \sim \int_{0}^{+\infty} (A_\alpha \cos\alpha x + B_\alpha \sin\alpha x)\, d\alpha,$$

که در آن

$$A_\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x\, dx \quad \text{و} \quad B_\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\alpha x\, dx,$$

A_α و B_α را ضرایب انتگرال فوریه‌ی f می‌نامیم. شرط مطلقاً انتگرال‌پذیری $f(x)$ برای اطمینان از وجود انتگرال‌های بالا است.

قضیه ۱۴. *فرض کنید تابع f بر $(-\infty,+\infty)$ پیوسته‌ی قطعه‌ای و تکه‌ای هموار باشد. هم‌چنین فرض کنید f بر $(-\infty,+\infty)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد. در این صورت*

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = \int_{0}^{+\infty} [A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x]\, d\alpha.$$

به ویژه اگر f در x پیوسته باشد، انتگرال فوریه‌ی f در x به $f(x)$ همگرا است، یعنی

$$f(x) = \int_{0}^{+\infty} (A_\alpha \cos\alpha x + B_\alpha \sin\alpha x)\, d\alpha.$$

فرض کنید که $f(x)$ یک تابع پیوسته‌ی قطعه‌ای و مطلقاً انتگرال‌پذیر روی فاصله‌ی $(0,+\infty)$ باشد. انتگرال فوریه‌ی سینوسی تابع $f(x)$ عبارت است از

$$f(x) \sim \int_{0}^{+\infty} B_\alpha \sin\alpha x\, d\alpha,$$

که در آن

$$B_\alpha = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(x)\sin\alpha x\, dx,$$

انتگرال فوریه‌ی کسینوسی تابع $f(x)$ عبارت است از

$$f(x) \sim \int_{0}^{+\infty} A_\alpha \cos\alpha x\, d\alpha,$$

که در آن

$$A_\alpha = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x\, dx,$$

انتگرال فوریه‌ی سینوسی و انتگرال فوریه‌ی کسینوسی تابع $f(x)$ در x به $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ همگرا است.

چند مثال

مثال ۱۵. *(آ) انتگرال فوریه تابع* $f(x) = \begin{cases} ۱ & |x| < ۱ \\ ۰ & |x| \geq ۱ \end{cases}$*، را بیابید.*

(ب) مقدار انتگرال $\int_۰^{+\infty} \frac{\sin\alpha}{\alpha}\, d\alpha$ *را محاسبه کنید.*

حل چون $f(x)$ یک تابع زوج است داریم

$$B_\alpha = \frac{۱}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \alpha x\, dx = ۰$$

و همچنین

$$A_\alpha = \frac{۱}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \alpha x\, dx = \frac{۲}{\pi} \int_۰^۱ \cos \alpha x\, dx = \frac{۲ \sin \alpha}{\pi\alpha}.$$

از طرف دیگر چون

$$\frac{۱}{۲}[f(x^+) + f(x^-)] = \begin{cases} ۱ & |x| < ۱ \\ ۰ & |x| > ۱ \\ \frac{۱}{۲} & |x| = ۱ \end{cases}$$

انتگرال فوریه‌ی $f(x)$ و همگرایی آن عبارت است از

$$\int_۰^{+\infty} \frac{۲\sin\alpha}{\pi\alpha} \cos \alpha x\, d\alpha = \begin{cases} ۱ & |x| < ۱ \\ ۰ & |x| > ۱ \\ \frac{۱}{۲} & |x| = ۱. \end{cases}$$

(ب) اگر در رابطه‌ی بالا $x = ۰$ قرار دهیم داریم

$$\int_۰^{+\infty} \frac{۲\sin\alpha}{\pi\alpha}\, d\alpha = ۱$$

که نتیجه می‌دهد

$$\int_۰^{+\infty} \frac{\sin\alpha}{\alpha}\, d\alpha = \frac{\pi}{۲}. \quad \blacksquare$$

مثال ۱۶. *با استفاده از انتگرال فوریه تابع* $f(x) = \begin{cases} ۱ - x^۲ & |x| < ۱ \\ ۰ & |x| \geq ۱ \end{cases}$ *مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید.*

$$\int_۰^{+\infty} \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha^۳}\, d\alpha$$

حل چون $f(x)$ زوج است داریم

$$B_\alpha = \frac{۱}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \alpha x\, dx = ۰.$$

اکنون با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء A_α را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)\cos\alpha x\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}(1-x^2)\cos\alpha x\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[(1-x^2)\frac{\sin\alpha x}{\alpha} - 2x\frac{\cos\alpha x}{\alpha^2} + 2\frac{\sin\alpha x}{\alpha^3}\right]_0^1 \\ &= \frac{4(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)}{\pi\alpha^3}. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\int_0^{+\infty}\frac{4(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)}{\pi\alpha^3}\cos\alpha x\,d\alpha = \frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)] = \begin{cases} 1-x^2 & |x|<1 \\ 0 & |x|\geq 1. \end{cases}$$

اکنون با فرض $x=0$ مقدار انتگرال مورد نظر به دست می‌آید

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{\alpha^3}\,d\alpha = \frac{\pi}{4}. \quad \blacksquare$$

مثال ۱۷. *انتگرال فوریه تابع* $f(x) = \begin{cases} \cos x & |x|<\pi \\ 0 & |x|\geq\pi \end{cases}$*، را بیابید.*

حل چون $f(x)$ تابع زوج است داریم $B_\alpha = 0$. اکنون A_α را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\alpha x\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\cos\alpha x\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(1+\alpha)x+\cos(1-\alpha)x]\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(1+\alpha)x}{1+\alpha}+\frac{\sin(1-\alpha)x}{1-\alpha}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(1+\alpha)\pi}{1+\alpha}+\frac{\sin(1-\alpha)\pi}{1-\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\sin\alpha\pi}{1+\alpha}+\frac{\sin\alpha\pi}{1-\alpha}\right) \\ &= \frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(1-\alpha^2)}. \end{aligned}$$

از این‌رو سری فوریه $f(x)$ و همگرایی آن عبارت است از

$$\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(1-\alpha^2)}\cos\alpha x\,d\alpha = \frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)] = \begin{cases} \cos x & |x|<\pi \\ 0 & |x|>\pi \\ -\frac{1}{2} & |x|=\pi. \end{cases} \quad \blacksquare$$

مثال ۱۸. (آ) *انتگرال فوریه سینوسی و کسینوسی تابع* $f(x) = \begin{cases} ۱ & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & ۱ < x < +\infty \end{cases}$، *را بیابید.*

حل ابتدا انتگرال فوریه‌ی سینوسی $f(x)$ را می‌یابیم. چون

$$B_\alpha = \frac{۲}{\pi}\int_۰^\infty f(x)\sin\alpha x\,dx = \frac{۲}{\pi}\int_۰^۱ \sin\alpha x\,dx = \frac{۲}{\pi\alpha}(۱-\cos\alpha).$$

پس انتگرال فوریه‌ی سینوسی $f(x)$ و همگرایی آن عبارت است از

$$\int_۰^{+\infty}\frac{۲}{\pi\alpha}(۱-\cos\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha = \frac{۱}{۲}[f(x^+)+f(x^-)] = \begin{cases} ۱ & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & ۱ < x < +\infty \\ \frac{۱}{۲} & x = ۱. \end{cases}$$

اکنون انتگرال فوریه‌ی کسینوسی $f(x)$ را می‌یابیم. داریم

$$A_\alpha = \frac{۲}{\pi}\int_۰^\infty f(x)\cos\alpha x\,dx = \frac{۲}{\pi}\int_۰^۱ \cos\alpha x\,dx = \frac{۲\sin\alpha}{\pi\alpha}.$$

بنابراین انتگرال فوریه‌ی کسینوسی $f(x)$ عبارت است از

$$\int_۰^{+\infty}\frac{۲\sin\alpha}{\pi\alpha}\cos\alpha x\,d\alpha = \begin{cases} ۱ & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & ۱ < x < +\infty \\ \frac{۱}{۲} & x = ۱. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

مثال ۱۹. *با استفاده از انتگرال فوریه‌ی مناسب، درستی روابط زیر را ثابت کنید*

$$\int_۰^{+\infty}\frac{\cos k\alpha + k\alpha\sin k\alpha - ۱}{\alpha^۲}\cos\alpha x\,d\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{۲}x & ۰ \le x < k \\ k\frac{\pi}{۴} & x = k \\ ۰ & x > k \end{cases}$$

$$\int_۰^{+\infty}\frac{\sin k\alpha - k\alpha\cos k\alpha}{\alpha^۲}\sin\alpha x\,d\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{۲}x & ۰ \le x < k \\ k\frac{\pi}{۴} & x = k \\ ۰ & x > k \end{cases}$$

حل قرار می‌دهیم $f(x) = \begin{cases} x & ۰ < x < k \\ ۰ & x > k \end{cases}$ و انتگرال فوریه‌ی سینوسی آن‌را می‌یابیم. داریم

$$\begin{aligned} B_\alpha &= \frac{۲}{\pi}\int_۰^{+\infty} f(x)\sin\alpha x\,dx = \frac{۱}{\pi}\int_۰^k x\sin\alpha x\,dx \\ &= \frac{۲}{\pi}\left[\frac{-x\cos\alpha x}{\alpha} + \frac{\sin\alpha x}{\alpha^۲}\right]_۰^k \\ &= \frac{۲}{\pi}\left(\frac{-k\cos\alpha k}{\alpha} + \frac{\sin\alpha k}{\alpha^۲}\right) \\ &= \frac{۲}{\pi}\frac{\sin\alpha k - k\alpha\cos\alpha k}{\alpha^۲}. \end{aligned}$$

چون $\begin{cases} x & 0<x<k \\ 0 & x>k \\ \frac{k}{2} & x=k \end{cases} = \frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]$ انتگرال فوریه‌ی سینوسی $f(x)$ و همگرایی آن عبارت است از

$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi}\frac{\sin\alpha k - k\alpha\cos\alpha k}{\alpha^2}\sin\alpha x\,dx = \begin{cases} x & 0<x<k \\ 0 & x>k \\ \frac{k}{2} & x=k. \end{cases}$$

در نتیجه

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha k - k\alpha\cos\alpha k}{\alpha^2}\sin\alpha x\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}x & 0<x<k \\ 0 & x>k \\ \frac{\pi}{4}k & x=k. \end{cases}$$

اکنون انتگرال فوریه‌ی کسینوسی $f(x)$ را می‌یابیم. داریم

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{k} x\cos\alpha x\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left.\frac{x\sin\alpha x}{\alpha}+\frac{\cos\alpha x}{\alpha^2}\right]_0^k \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{k\sin\alpha k}{\alpha}+\frac{\cos\alpha k}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{k\alpha\sin\alpha k+\cos\alpha k-1}{\alpha^2} \end{aligned}$$

بنابراین انتگرال فوریه‌ی کسینوسی $f(x)$ و همگرایی آن عبارت است از

$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi}\frac{k\alpha\sin\alpha k+\cos\alpha k-1}{\alpha^2}\cos\alpha x\,dx = \begin{cases} x & 0<x<k \\ 0 & x>k \\ \frac{k}{2} & x=k. \end{cases}$$

در نتیجه

$$\int_0^{+\infty} \frac{k\alpha\sin\alpha k+\cos\alpha k-1}{\alpha^2}\cos\alpha x\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}x & 0<x<k \\ 0 & x>k \\ \frac{\pi}{4}k & x=k. \end{cases}$$

خلاصه فصل ۳، مسائل اشتورم-لیوویل

جلسه چهارم ۲۳ تیرماه ۱۳۹۳

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی دوم

$$\frac{d}{dx}\left[r(x)\frac{dy}{dx}\right]+[q(x)+\sigma p(x)]y=0,$$

که در آن σ یک پارامتر است و توابع $p(x)$، $q(x)$، و $r(x)$ توابع حقیقی هستند، را یک معادله‌ی اشتورم-لیوویل گوییم. برای اطمینان از وجود جواب فرض می‌کنیم $p(x)$، $q(x)$، $r(x)$، و $r'(x)$ در فاصله‌ی $[a,b]$ پیوسته‌اند و به ازای هر $x\in[a,b]$، $r(x)\neq 0$. هر معادله دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی دوم

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$$

را می‌توان با ضرب کردن در تابع

$$\mu(x)=\frac{1}{P(x)}e^{\int\frac{Q(x)}{P(x)}\,dx}$$

به معادله‌ی اشتورم-لیوویل تبدیل کرد.

اگر عملگر L را به صورت

$$L=\frac{d}{dx}\left[r\frac{d}{dx}\right]+qy$$

تعریف کنیم، معادله‌ی اشتورم-لیوویل را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$L\left[y\right]+\sigma p(x)y=0.$$

یک معادله‌ی اشتورم-لیوویل

$$L[y]+\sigma p(x)y=0 \qquad a<x<b$$

به همراه شرایط مرزی

$$\begin{cases} a_1y(a)+b_1y'(a)=0 \\ a_2y(b)+b_2y'(b)=0 \end{cases} \qquad (1)$$

که در آن a_1، a_2، b_1، b_2 اعداد حقیقی ثابت هستند؛ علاوه بر آن a_1، b_1 و a_2، b_2 هر دو با هم صفر نیستند؛ را یک مسأله‌ی اشتورم-لیوویل (مسأله‌ی مقدار مرزی) منظم گوییم. شرایط مرزی (۱) را، که خطی و همگن هستند، شرایط مرزی مسأله گوییم. توجه کنید که تابع ثابت $y(x)=0$ هم در معادله دیفرانسیل و هم در شرایط مرزی صدق می‌کند. این جواب را جواب بدیهی گوییم. جواب‌های نابدیهی مسأله را (در صورت وجود) توابع ویژه‌ی مسأله و مقادیر σ که به ازای آن‌ها جواب نابدیهی وجود دارد را مقادیر ویژه‌ی مسأله گوییم. چون معادله و شرایط مرزی همگن هستند، به سادگی می‌توان دید که هر ترکیب خطی از توابع ویژه‌ی متناظر مقدار ویژه‌ی σ، مجدداً تابع ویژه متناظر با σ است. به ویژه هر ضریب یک تابع ویژه، مجدداً تابع ویژه است.

قضیه ۲۰. *فرض کنید توابع $p(x)$، $q(x)$، $r(x)$، و $r'(x)$ در فاصله‌ی $[a,b]$ پیوسته باشند و به ازای هر $x \in [a,b]$، $r(x) \neq ۰$. اگر $\varphi_\lambda(x)$ و $\varphi_\mu(x)$ توابع ویژه‌ی مسأله اشتورم-لیوویل*

$$\begin{cases} L[y] + \sigma p(x)y = ۰, & a < x < b \\ a_۱ y(a) + b_۱ y'(a) = ۰ \\ a_۲ y(b) + b_۲ y'(b) = ۰. \end{cases}$$

متناظر مقادیر ویژه‌ی متمایز λ و μ باشند، آن‌گاه $\varphi_\lambda(x)$ و $\varphi_\mu(x)$ نسبت به تابع وزن $p(x)$ متعامد هستند، یعنی

$$\int_a^b p(x)\varphi_\lambda(x)\varphi_\mu(x)\,dx = ۰.$$

فرض کنید $\{\varphi_n(x)\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ی توابع ویژه‌ی مسأله اشتورم-لیوویل متناظر مقادیر ویژه‌ی متمایز باشد. دیدیم دنباله‌ی $\{\varphi_n(x)\}_{n=۱}^{\infty}$ نسبت به تابع وزن $p(x)$ متعامد است. از این‌رو می‌توانیم سری فوریه‌ی تابع پیوسته‌ی قطعه‌ای روی فاصله‌ی $[a,b]$ را بر حسب این مجموعه‌ی متعامد بیابیم. فرض کنید $\sum_{n=۱}^{\infty} C_n\varphi_n(x)$ سری فوریه‌ی f نسبت به این مجموعه‌ی متعامد باشد، که در آن $C_n = \dfrac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^۲}$، ضرایب سری فوریه هستند. می‌توان نشان داد تساوی پارسوال برقرار است، یعنی $\|f\|^۲ = \sum_{n=۱}^{\infty} C_n^۲\|\varphi_n\|^۲$.
علاوه بر آن اگر f پیوسته‌ی قطعه‌ای باشند، آن‌گاه سری فوریه‌ی f در هر نقطه‌ی $x \in (a,b)$ که مشتقات چپ و راست f وجود داشته باشند، به $\frac{۱}{۲}[f(x^-) + f(x^+)]$ همگرا است.

چند مثال

معادله دیفرانسیل

$$x^۲y'' + xy' + \sigma y = ۰\,, \quad x > ۰$$

را در نظر بگیرید. با ضرب کردن معادله در

$$\mu = \frac{۱}{x^۲}e^{\int \frac{x}{x^۲}\,dx} = \frac{۱}{x^۲}e^{\ln x} = \frac{۱}{x}.$$

خواهیم داشت

$$xy'' + y' + \frac{\sigma}{x}y = ۰.$$

از این‌رو معادله‌ی اشتورم-لیوویل متناظر عبارت است از

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] + \frac{\sigma}{x}y = ۰.$$

سه مثال مهم بعد نشان می‌دهند مجموعه‌های متعامد مثلثاتی که قبلاً دیده‌ایم، توابع ویژه‌ی مساله‌های اشتورم-لیوویل بخصوصی هستند.

مثال ۲۱. *مقادیر و توابع ویژه‌ی مسأله‌ی اشتورم-لیوویل زیر را بیابید.*

$$\begin{cases} y'' + \sigma y = ۰, & ۰ < x < L \\ y(۰) = ۰ \\ y(L) = ۰. \end{cases}$$

حل چون معادله شاخص معادله دیفرانسیل $y''+\sigma y=0$ (که با فرض $y(x)=e^{rx}$ به دست می‌آید) عبارت است از $r^2+\sigma=0$، پس $r=\pm\sqrt{-\sigma}$، و در نتیجه باید سه حالت در نظر بگیریم: $\sigma=0$، $\sigma<0$، و $\sigma>0$. حالت مختلط برای σ را در نظر نمی‌گیریم، زیرا ثابت می‌شود که تحت یک شرط (که برای مساله‌های مورد بررسی معمولاً برقرار هستند) مقادیر ویژه‌ی مسأله‌ی اشتورم-لیوویل منظم حقیقی هستند.

حالت اول: $\sigma=0$. در این حالت داریم $r=0$. پس جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x)=c_1x+c_2.$$

چون $y(0)=0$، داریم $c_2=0$، پس $y(x)=c_1x$. اکنون چون $y(L)=0$، داریم $c_1L=0$، که نتیجه می‌دهد $y(x)=0$. از این‌رو در این حالت مسأله فقط جواب بدیهی دارد. پس $\sigma=0$ مقدار ویژه نیست.

حالت دوم: $\sigma=-\lambda^2$، که در آن $\lambda=\sqrt{-\sigma}>0$. در این حالت داریم $r=\pm\lambda$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x)=c_1\cosh\lambda x+c_2\sinh\lambda x.$$

چون $y(0)=0$، داریم $c_1=0$، پس $y(x)=c_2\sinh\lambda x$. اکنون چون $y(L)=0$، داریم $c_2\sinh\lambda L=0$. پس $c_2=0$ یا $\sinh\lambda L=0$، اما حالت اخیر رخ نمی‌دهد، زیرا $\sinh\lambda L\neq 0$. پس باید داشته باشیم $c_2=0$ و در نتیجه $y(x)=0$. از این‌رو در این حالت مسأله فقط جواب بدیهی دارد. پس $\sigma<0$ هم مقدار ویژه نیست.

حالت سوم: $\sigma=\lambda^2$، که در آن $\lambda=\sqrt{\sigma}>0$. در این حالت داریم $r=\pm i\lambda$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x.$$

چون $y(0)=0$، داریم $c_1=0$، پس $y(x)=c_2\sin\lambda x$. اکنون چون $y(L)=0$، داریم $c_2\sin\lambda L=0$. پس $c_2=0$ یا $\sin\lambda L=0$. اگر $\sin\lambda L=0$، آن‌گاه $\lambda L=n\pi$ عدد طبیعی است. پس اگر $\lambda=\frac{n\pi}{L}$، $n=1,2,3,\dots$، آن‌گاه می‌توان c_2 را ناصفر گرفت و جواب‌های نابدیهی از مسأله را یافت. بنابراین جواب‌های متناظر $\lambda_n=\frac{n\pi}{L}$، $n=1,2,3,\dots$، عبارتند از $c_2\sin\frac{n\pi}{L}x$. از این‌رو مقادیر و توابع ویژه‌ی مسأله عبارتند از

$$\sigma_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,\quad y_n(x)=\sin\frac{n\pi}{L}x. \quad \blacksquare$$

مثال ۲۲. *مقادیر و توابع ویژه‌ی مسأله‌ی اشتورم-لیوویل زیر را بیابید.*

$$\begin{cases} y''+\sigma y=0, & 0<x<\pi \\ y'(0)=0 \\ y'(\pi)=0. \end{cases}$$

حل معادله شاخص معادله دیفرانسیل $y''+\sigma y=0$ عبارت است از $r^2+\sigma=0$، پس $r=\pm\sqrt{-\sigma}$، و مشابه مثال قبل سه حالت در نظر می‌گیریم: $\sigma=0$، $\sigma<0$، و $\sigma>0$.

حالت اول: $\sigma=0$. در این حالت داریم $r=0$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x)=c_1x+c_2.$$

چون $y'(\circ) = \circ$، داریم $c_1 = \circ$، پس $y(x) = c_2$. اکنون چون تابع $y(x) = c_2$ در شرط $y'(\pi) = \circ$ صدق می‌کند، پس $y(x) = c_2$، برای $c_2 \neq \circ$، یک جواب نابدیهی از مسأله است. از این‌رو $\sigma_\circ = \circ$ یک مقدار ویژه و $y_\circ(x) = 1$ یک تابع ویژه متناظر آن است.

حالت دوم: $\sigma = -\lambda^2$، که در آن $\lambda = \sqrt{-\sigma} > \circ$. در این حالت داریم $r = \pm\lambda$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x) = c_1 \cosh \lambda x + c_2 \sinh \lambda x.$$

چون $y'(\circ) = \circ$، داریم $c_2 = \circ$، پس $y(x) = c_1 \cosh \lambda x$. اکنون چون $y'(\pi) = \circ$، داریم $c_1 \lambda \sinh \lambda\pi = \circ$. پس $c_1 \lambda\pi = \circ$ یا $\sinh \lambda = \circ$، اما حالت اخیر رخ نمی‌دهد، زیرا $\sinh \lambda\pi \neq \circ$. پس باید داشته باشیم $c_1 = \circ$ و در نتیجه $y(x) = \circ$. از این‌رو در این حالت مسأله فقط جواب بدیهی دارد. پس $\sigma < \circ$ مقدار ویژه نیست.

حالت سوم: $\sigma = \lambda^2$، که در آن $\lambda = \sqrt{\sigma} > \circ$. در این حالت داریم $r = \pm i\lambda$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x.$$

چون $y'(\circ) = \circ$، داریم $c_2 = \circ$، پس $y(x) = c_1 \cos \lambda x$. اکنون چون $y'(\pi) = \circ$، داریم $-c_1 \lambda \sin \lambda\pi = \circ$. پس $c_1 = \circ$ یا $\sin \lambda\pi = \circ$. اگر $\sin \lambda\pi = \circ$، آن‌گاه $\lambda = n$ عدد طبیعی است. پس اگر $\lambda = n$، $n = 1, 2, 3, \ldots$، آن‌گاه می‌توان c_1 را ناصفر گرفت و جواب‌های نابدیهی از مسأله را یافت. بنابراین جواب‌های متناظر $\lambda_n = n$، $n = 1, 2, 3, \ldots$، عبارتند از $c_2 \cos nx$. از این‌رو مقادیر و توابع ویژه‌ی مسأله عبارتند از

$$\sigma_\circ = \circ, \quad y_\circ(x) = 1, \qquad \sigma_n = n^2, \quad y_n(x) = \cos nx. \quad \blacksquare$$

به طور کلی‌تر مثال بالا نشان می‌دهد که مقادیر و توابع ویژه‌ی مساله‌ی

$$\begin{cases} y'' + \sigma y = \circ, & \circ < x < L \\ y'(\circ) = \circ \\ y'(L) = \circ. \end{cases}$$

عبارتند از

$$\sigma_\circ = \circ, \quad y_\circ(x) = 1, \qquad \sigma_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad y_n(x) = \cos \frac{n\pi}{L} x.$$

مثال ۲۳. *مقادیر و توابع ویژه‌ی مسأله‌ی اشتورم-لیوویل زیر را بیابید.*

$$\begin{cases} y'' + \sigma y = \circ, & -\pi < x < \pi \\ y(-\pi) = y(\pi) \\ y'(-\pi) = y'(\pi). \end{cases}$$

حل معادله شاخص معادله دیفرانسیل $y'' + \sigma y = \circ$ عبارت است از $r^2 + \sigma = \circ$، پس $r = \pm\sqrt{-\sigma}$، و مشابه مثال قبل سه حالت در نظر می‌گیریم: $\sigma = \circ$، $\sigma < \circ$، و $\sigma > \circ$.

حالت اول: $\sigma = \circ$. در این حالت داریم $r = \circ$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x) = c_1 x + c_2.$$

چون $y(\pi)=y(-\pi)$، داریم $-c_۱\pi+c_۲=c_۱\pi+c_۲$، که نتیجه می‌دهد $c_۱=۰$. پس $y(x)=c_۲$. اکنون چون تابع $y(x)=c_۲$ در شرط $y'(-\pi)=y'(\pi)$ صدق می‌کند، پس $y(x)=c_۲$، برای $c_۲\neq ۰$، یک جواب نابدیهی از مسأله است. از این‌رو $\sigma_۰=۰$ یک مقدار ویژه و $y_۰(x)=۱$ یک تابع ویژه متناظر آن است.

حالت دوم: $\sigma=-\lambda^۲$، که در آن $\lambda=\sqrt{-\sigma}>۰$. در این حالت داریم $r=\pm\lambda$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x)=c_۱\cosh\lambda x+c_۲\sinh\lambda x.$$

چون $y(\pi)=y(-\pi)$، داریم

$$c_۱\cosh\lambda(-\pi)+c_۲\sinh\lambda(-\pi)=c_۱\cosh\lambda\pi+c_۲\sinh\lambda\pi$$

و در نتیجه

$$c_۱\cosh\lambda\pi-c_۲\sinh\lambda\pi=c_۱\cosh\lambda\pi+c_۲\sinh\lambda\pi.$$

با ساده کردن رابطه‌ی اخیر به دست می‌آوریم $c_۲\sinh\lambda\pi=۰$ و چون $\sinh\lambda\pi\neq۰$ خواهیم داشت $c_۲=۰$. بنابراین $y(x)=c_۱\cosh\lambda x$. اکنون چون $y'(-\pi)=y'(\pi)$،

$$c_۱\lambda\sinh\lambda(-\pi)=c_۱\lambda\sinh\lambda\pi$$

و در نتیجه $c_۱\lambda\sinh\lambda\pi=۰$ و داریم $c_۱=۰$. در نتیجه $y(x)=۰$. از این‌رو در این حالت مسأله فقط جواب بدیهی دارد. پس $\sigma<۰$ مقدار ویژه نیست.

حالت سوم: $\sigma=\lambda^۲$، که در آن $\lambda=\sqrt{\sigma}>۰$. در این حالت داریم $r=\pm i\lambda$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x)=c_۱\cos\lambda x+c_۲\sin\lambda x.$$

چون $y(-\pi)=y(\pi)$ و $y'(-\pi)=y'(\pi)$، داریم

$$\begin{cases} c_۱\cos\lambda(-\pi)-c_۲\sin\lambda(-\pi)=c_۱\cos\lambda\pi+c_۲\sin\lambda\pi\\ \lambda c_۱\sin\lambda(-\pi)+\lambda c_۲\cos\lambda(-\pi)=-\lambda c_۱\sinh\lambda\pi+\lambda c_۲\cos\lambda\pi.\end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} c_۱\cos\lambda\pi-c_۲\sin\lambda\pi=c_۱\cos\lambda\pi+c_۲\sin\lambda\pi\\ \lambda c_۱\sin\lambda\pi+\lambda c_۲\cos\lambda\pi=-\lambda c_۱\sinh\lambda\pi+\lambda c_۲\cos\lambda\pi.\end{cases}$$

از معادلات بالا نتیجه می‌گیریم که

$$c_۱\sin\lambda\pi=۰ \quad \text{و} \quad c_۲\sin\lambda\pi=۰.$$

برای داشتن جواب نابدیهی از معادله باید λ برابر یکی از مقادیر

$$\lambda_n=n,\qquad n=۱,۲,۳,\ldots$$

باشد. به ازای چنین λای مقادیر $c_۱$ و $c_۲$ را می‌توان ناصفر در نظر گرفت و جواب‌هاب نابدیهی از مسأله را یافت. پس در این حالت مقادیر ویژه‌ی مسأله و توابع ویژه‌ی متناظر عبارتند از

$$\sigma_n=\lambda_n^۲=n^۲,\quad y_n=\cos nx,\quad \sin nx,\quad n=۱,۲,\ldots. \quad \blacksquare$$

به طور کلی‌تر مثال بالا نشان می‌دهد که مقادیر و توابع ویژه‌ی مساله‌ی

$$\begin{cases} y''+\sigma y=0, & -L<x<L \\ y(-L)=y(L) \\ y'(-L)=y'(L). \end{cases}$$

عبارتند از

$$\sigma_n=\lambda_n^2=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad y_n=\cos\frac{n\pi}{L}x, \quad \sin\frac{n\pi}{L}x, \quad n=1,2,\dots.$$

مثال ۲۴. *مقادیر و توابع ویژه‌ی مسأله‌ی اشتورم-لیوویل زیر را بیابید، که در آن $h>0$ عدد ثابت است،*

$$\begin{cases} y''+\sigma y=0, & 0<x<L \\ y(0)=0 \\ y(L)+hy'(L)=0. \end{cases}$$

حل معادله شاخص معادله دیفرانسیل $y''+\sigma y=0$ عبارت است از $r^2+\sigma=0$، پس $r=\pm\sqrt{-\sigma}$، و مشابه مثال قبل سه حالت در نظر می‌گیریم: $\sigma=0$، $\sigma<0$، و $\sigma>0$.

حالت اول: $\sigma=0$. در این حالت داریم $y''=0$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x)=c_1x+c_2.$$

چون $y(0)=0$، داریم $c_2=0$، پس $y(x)=c_1x$. اکنون چون $y(L)+hy'(L)=0$، داریم $c_1L+hc_1=0$، که نتیجه می‌دهد $y(x)=0$. از این‌رو در این حالت مسأله فقط جواب بدیهی دارد. پس $\sigma=0$ مقدار ویژه نیست.

حالت دوم: $\sigma=-\lambda^2$، که در آن $\lambda=\sqrt{-\sigma}>0$. در این حالت داریم $y''-\lambda^2y=0$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x)=c_1\cosh\lambda x+c_2\sinh\lambda x.$$

چون $y(0)=0$، خواهیم داشت $c_1=0$، و در نتیجه $y(x)=c_2\sinh\lambda x$. اکنون چون $y(L)+hy'(L)=0$، داریم

$$c_2\sinh\lambda L+h\lambda c_2\cosh\lambda L=0.$$

پس $c_2=0$ یا $\sinh\lambda L+h\lambda\cosh\lambda L=0$. در حالت اخیر داریم

$$\tanh\lambda L=-h\lambda.$$

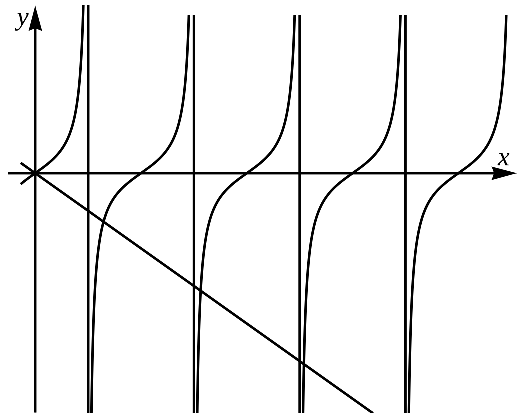
با فرض $\alpha=\lambda L$ می‌توان نوشت

$$\tanh\alpha=\frac{-h}{L}\alpha.$$

با توجه به این‌که منحنی $y=\tanh x$ و خط $y=-\frac{h}{L}x$ فقط در $x=0$ یکدیگر را قطع می‌کنند، نتیجه می‌گیریم که این حالت رخ نمی‌دهد. پس باید داشته باشیم $c_2=0$ و در نتیجه $y(x)=0$. از این‌رو در این حالت مسأله فقط جواب بدیهی دارد. پس $\sigma<0$ مقدار ویژه نیست.

حالت سوم: $\sigma=\lambda^2$، که در آن $\lambda=\sqrt{\sigma}>0$. در این حالت داریم $y''+\lambda^2y=0$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x.$$



شکل ۱: معادله‌ی $\tan x = -kx$ بی‌نهایت جواب دارد.

چون $y(0) = 0$، داریم $c_1 = 0$، پس $y(x) = c_2 \sin \lambda x$. اکنون چون $y(L) + hy'(L) = 0$، خواهیم داشت

$$c_2 \sin \lambda L + h\lambda c_2 \cos \lambda L = 0.$$

پس $c_2 = 0$ یا $\sin \lambda L + h\lambda \cos \lambda L = 0$. در حالت اخیر داریم

$$\tan \lambda L = -h\lambda.$$

با فرض $\alpha = \lambda L$ می‌توان نوشت

$$\tan \alpha = \frac{-h}{L}\alpha.$$

با توجه به این‌که منحنی $y = \tan x$ و خط $y = -\frac{h}{L}x$ در بی‌نهایت نقطه‌ی

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots$$

یکدیگر را قطع می‌کنند (شکل ۱ راببینید)، داریم $\alpha_n = \lambda_n L$ و بنابراین $\lambda_n = \frac{\alpha_n}{L}$. از این‌رو مقادیر و توابع ویژه‌ی مسأله عبارتند از

$$\sigma_n = \lambda_n^2 = \left(\frac{\alpha_n}{L}\right)^2, \qquad y_n = \sin \frac{\alpha_n}{L}x, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots . \quad \blacksquare$$

مثال ۲۵. *مقادیر و توابع ویژه‌ی مسأله‌ی اشتورم-لیوویل زیر را بیابید.*

$$\begin{cases} y'' + y' + \sigma y = 0, \quad 0 < x < \pi \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0. \end{cases}$$

حل چون معادله شاخص معادله دیفرانسیل $y'' + y' + \sigma y = 0$ (که با فرض $y(x) = e^{rx}$ به دست می‌آید) عبارت است از $r^2 + r + \sigma = 0$، پس

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\sigma}}{2}$$

و در نتیجه باید سه حالت در نظر بگیریم: $1 - 4\sigma = 0$، $1 - 4\sigma < 0$، و $1 - 4\sigma > 0$.

حالت اول: $1 - 4\sigma = 0$، یعنی $\sigma = \frac{1}{4}$: در این حالت داریم $r = \frac{-1}{2}$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x) = c_1 e^{-x/2} + c_2 x e^{-x/2}.$$

چون $y(\circ)=\circ$، داریم $c_۱=\circ$، پس $y(x)=c_۲xe^{-x/۲}$. اکنون چون $y(\pi)=\circ$، داریم $c_۲\pi e^{-\pi/۲}=\circ$، که نتیجه می‌دهد $y(x)=\circ$. از این‌رو در این حالت مسأله فقط جواب بدیهی دارد. پس $\sigma=\frac{۱}{۴}$ مقدار ویژه نیست.

حالت دوم: $\circ<\lambda^۲=۴\sigma-۱$، یعنی $\sigma<\frac{۱}{۴}$، و $\sigma=\dfrac{۱-\lambda^۲}{۲}$. در این حالت داریم $r_۱,r_۲=\dfrac{-۱}{۲}\pm\dfrac{\lambda}{۲}$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x)=c_۱e^{r_۱x}+c_۲e^{r_۲x}.$$

چون $y(\circ)=\circ$، داریم $c_۱+c_۲=\circ$، و چون $y(\pi)=\circ$، داریم $c_۱e^{r_۱\pi}+c_۲e^{r_۲\pi}=\circ$. پس $c_۱=c_۲=\circ$ و در نتیجه $y(x)=\circ$. از این‌رو در این حالت مسأله فقط جواب بدیهی دارد. پس $\sigma<\frac{۱}{۴}$ مقدار ویژه نیست.

حالت دوم: $\circ>-\lambda^۲=۴\sigma-۱$، یعنی $\sigma>\frac{۱}{۴}$، و $\sigma=\dfrac{۱+\lambda^۲}{۲}$. در این حالت داریم $r_۱,r_۲=\dfrac{-۱}{۲}\pm i\dfrac{\lambda}{۲}$. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x)=c_۱e^{-x/۲}\cos\frac{\lambda}{۲}x+c_۲e^{-x/۲}\sin\frac{\lambda}{۲}x.$$

چون $y(\circ)=\circ$، داریم $c_۱=\circ$، پس $y(x)=c_۲e^{-x/۲}\sin\frac{\lambda}{۲}x$. اکنون چون $y(\pi)=\circ$، داریم $c_۲e^{-\pi/۲}\sin\frac{\lambda}{۲}\pi=\circ$. پس $c_۲=\circ$ یا $\sin\frac{\lambda}{۲}\pi=\circ$. اگر $\sin\frac{\lambda}{۲}\pi=\circ$، آن‌گاه $\lambda=۲n$. پس اگر $\lambda=۲n$، $n=۱,۲,۳,\ldots$، آن‌گاه می‌توان $c_۲$ را ناصفر گرفت و جواب‌های نابدیهی از مسأله را یافت. بنابراین جواب‌های متناظر $\lambda_n=۲n$، $n=۱,۲,۳,\ldots$، عبارتند از $c_۲e^{-x/۲}\sin nx$. از این‌رو مقادیر و توابع ویژه‌ی مسأله عبارتند از

$$\sigma_n=\frac{۱+\lambda_n^۲}{۲}=\frac{۱+۴n^۲}{۲},\quad y_n(x)=e^{-x/۲}\sin nx.\quad\blacksquare$$

خلاصه قسمتی از فصل‌های ۴ و ۵، معادلات با مشتقات جزئی همگن در حالت متناهی

جلسه پنجم ۲۴ تیرماه ۱۳۹۳

برخی معادلات (همگن) با مشتقات جزیی مهم:

$u_{xx} = a^2 u_t$ معادله گرمای یک بعدی

$u_{xx} + u_{yy} = a^2 u_t$ معادله گرمای دو بعدی

$u_{xx} = a^2 u_{tt}$ معادله موج یک بعدی

$u_{xx} + u_{yy} = 0$ معادله گرمای دو بعدی مستقل از زمان (معادله لاپلاس)

تابع مجهول در معادله‌های بالا، به ترتیب، تابع $u = u(x,t)$، $u = u(x,y,t)$، $u = u(x,t)$، $u = u(x,y)$ است. فرض می‌کنیم $t \geq 0$ (پارامتر t نشان‌دهنده‌ی زمان است)، $a_1 < x < b_1$، $c_1 < y < d_1$، حالت‌های $a_1, c_1 = -\infty$ و $b_1, d_1 = +\infty$ نیز امکان‌پذیر هستند. برای تعیین تابع u از معادله به تعدادی شرط نیاز داریم. تعداد شرط‌ها برای هرمتغیر برابر مرتبه‌ی مشتق نسبت به هر متغیر است. مثلاً در معادله‌ی گرمای یک بعدی یک شرط متناظر t و دو شرط متناظر x داریم. شرایط متناظر t را شرایط اولیه و شرایط متناظر x را شرایط مرزی می‌نامیم. برای حل معادله از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌کنیم. برای استفاده از این روش لازم است که معادله و شرایط مرزی، همگن باشند.

اگر $u = u(x,y)$، آن‌گاه با قرار دادن $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ می‌توان u را به عنوان تابعی از (r,θ) در نظر گرفت. با استفاده از قاعده‌ی زنجیری می‌توان نشان داد که $u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$. بنابراین معادله‌ی لاپلاس در مختصات قطبی عبارت است از

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0.$$

چند مثال

در مثال‌های بعد روش جداسازی متغیرها را تشریح می‌کنیم.

مثال ۲۶. *معادله با شرایط مرزی زیر را حل کنید*

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0 \tag{3}$$

$$u(\pi,t) = 0 \tag{4}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{5}$$

حل ابتدا می‌خواهیم جواب معادله‌ی (۲) که در شرایط مرزی (۳)-(۴) صدق می‌کند را بیابیم. واضح است که $u(x,t) = 0$ هم در معادله و هم در شرایط مرزی صدق می‌کند، که آن‌را جواب بدیهی گوییم. برای یافتن جواب‌های نابدیهی ابتدا جواب‌هایی به صورت حاصل‌ضرب دو تابع بر حسب x و t را می‌یابیم، یعنی قرار می‌دهیم

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

داریم

$$u_t(x,t) = X(x)T'(t), \quad u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$$

و در نتیجه

$$X(x)T'(t) = a^۲X''(x)T(t).$$

از این‌رو

$$\frac{T'}{a^۲T} = \frac{X''}{X}.$$

چون سمت چپ رابطه‌ی بالا تابعی بر حسب t و طرف راست آن تابعی بر حسب x است، پس باید مقداری ثابت باشد، یعنی

$$\frac{T'}{a^۲T} = \frac{X''}{X} = -\sigma.$$

که نتیجه می‌دهد

$$X'' + \sigma X = ۰, \quad T' = -a^۲\sigma T.$$

اکنون چون $u(۰,t) = ۰$، داریم $X(۰)T(t) = ۰$ و چون $T(t)$ متحد با صفر نیست، داریم

$$X(۰) = ۰.$$

از طرف دیگر چون $u(\pi,t) = ۰$، داریم $X(\pi)T(t) = ۰$ و چون $T(t)$ متحد با صفر نیست، داریم

$$X(\pi) = ۰.$$

از این‌رو یک مسأله به صورت زیر برای $X(x)$ داریم

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = ۰, & ۰ < x < \pi \\ X(۰) = ۰ \\ X(\pi) = ۰ \end{cases} \tag{۶}$$

که یک مسأله‌ی اشتورم-لیوویل (مسأله‌ی مقدارمرزی) است. باید جواب‌های غیر بدیهی و مقادیر σ که به ازای آن‌ها جواب نابدیهی وجود دارد را تعیین کنیم، یعنی توابع و مقادیر ویژه‌ی مسأله را بیابیم. در مثال ۲۱ دیدیم که مقادیر و توابع ویژه مسأله‌ی (۶) عبارتند از

$$\sigma_n = \lambda_n^۲ = n^۲, \quad X_n(x) = \sin nx, \quad n = ۱, ۲, ۳, \ldots.$$

اکنون جواب‌های متناظر $T(t)$ را می‌یابیم. چون $T' = -a^۲\sigma T$، متناظر مقدار ویژه‌ی $\sigma = \lambda^۲ = n^۲$ داریم $T_n(t) = e^{-a^۲n^۲t}$. در نتیجه جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی $u_t(x,t) = a^۲u_{xx}(x,t)$ که در شرایط مرزی $u(۰,t) = ۰$ و $u(\pi,t) = ۰$ صدق می‌کند عبارتند از

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-a^۲n^۲t}\sin nx, \quad n = ۱, ۲, ۳, \ldots.$$

از این‌رو کلی‌ترین جواب (جواب عمومی) معادله‌ی (۲) که در شرایط مرزی (۳) و (۴) صدق می‌کند، ترکیب خطی همه‌ی جواب‌های حاصل ضربی است، و عبارت است از

$$u(x,t) = \sum_{n=۱}^{\infty} B_nX_n(x)T_n(t) = \sum_{n=۱}^{\infty} B_ne^{-a^۲n^۲t}\sin nx.$$

اکنون با استفاده از شرط اولیه‌ی (۵) ضرایب مجهول B_n را تعیین می‌کنیم. چون داریم

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx$$

و در نتیجه B_n همان ضریب سری فوریه‌ی سینوسی $f(x)$ است، یعنی

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

با مشخص بودن $f(x)$ ضرایب B_n و در نتیجه جواب مسأله به دست می‌آید. ■

مثال ۲۷. *معادله با شرایط مرزی زیر را حل کنید*

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \tag{۷}$$

$$u_x(0,t) = 0 \tag{۸}$$

$$u_x(\pi,t) = 0 \tag{۹}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{۱۰}$$

حل ابتدا جواب معادله‌ی (۷) که در شرایط مرزی (۸)-(۹) صدق می‌کند را می‌یابیم. قرار می‌دهیم

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

داریم

$$u_t(x,t) = X(x)T'(t), \quad u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$$

و در نتیجه

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

از این‌رو

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X}.$$

چون سمت چپ رابطه‌ی بالا تابعی بر حسب t و طرف راست آن تابعی بر حسب x است، پس باید مقداری ثابت باشد، یعنی

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\sigma.$$

که نتیجه می‌دهد

$$X'' + \sigma X = 0, \quad T' = -a^2\sigma T.$$

اکنون چون $u_x(0,t) = 0$، داریم $X'(0)T(t) = 0$ و چون $T(t)$ متحد با صفر نیست، داریم

$$X'(0) = 0.$$

از طرف دیگر چون $u_x(\pi,t) = 0$، داریم $X'(\pi)T(t) = 0$ و چون $T(t)$ متحد با صفر نیست، داریم

$$X'(\pi) = 0.$$

از این‌رو یک مسأله مقدار مرزی به صورت زیر برای $X(x)$ داریم

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = ۰, & ۰ < x < \pi \\ X'(۰) = ۰ \\ X'(\pi) = ۰. \end{cases} \tag{۱۱}$$

در مثال ۲۵ دیدیم که مقادیر و توابع ویژه‌ی مسأله‌ی (۱۱) عبارتند از

$$\sigma_۰ = \lambda_۰ = ۰, \quad X_۰(x) = ۱$$
$$\sigma_n = \lambda_n^۲ = n^۲, \quad X_n(x) = \cos nx, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

اکنون جواب‌های متناظر $T(t)$ را می‌یابیم. چون داریم $T' = -a^۲\sigma T$، متناظر $\sigma = ۰$ داریم $T_۰(t) = ۱$؛ و متناظر $\sigma = \lambda^۲ = n^۲$ داریم $T_n(t) = e^{-a^۲n^۲t}$. در نتیجه جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی $u_t = a^۲u_{xx}$ که در شرایط مرزی $u_x(۰, t) = ۰$ و $u_x(\pi, t) = ۰$ صدق می‌کند عبارتند از

$$u_۰(x, t) = X_۰(x)T_۰(t) = ۱$$
$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-a^۲n^۲t}\cos nx, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots.$$

از این‌رو کلی‌ترین جواب (جواب عمومی) معادله دیفرانسیل $u_t(x, t) = a^۲u_{xx}(x, t)$ که در شرایط مرزی $u_x(۰, t) = ۰$ و $u_x(\pi, t) = ۰$ صدق می‌کند عبارت است از

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty} A_n X_n(x) T_n(t) \\ &= A_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty} A_n e^{-a^۲n^۲t}\cos nx. \end{aligned}$$

اکنون با استفاده از شرط اولیه‌ی $u(x, ۰) = f(x)$ ضرایب مجهول را تعیین می‌کنیم. چون داریم

$$f(x) = u(x, ۰) = A_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty} A_n \cos nx$$

و در نتیجه ضرایب با استفاده از سری فوریه‌ی کسینوسی $f(x)$ به دست می‌آیند. بنابراین

$$A_۰ = \frac{۱}{\pi}\int_۰^{\pi} f(x)\, dx, \qquad A_n = \frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi} f(x)\cos nx\, dx.$$

با مشخص بودن $f(x)$ ضرایب A_n و در نتیجه جواب مسأله به دست می‌آید. ■

مثال ۲۸. *معادله موج با شرایط مرزی زیر را حل کنید*

$$u_{tt} = a^۲u_{xx}, \quad ۰ < x < \pi, \quad t > ۰ \tag{۱۲}$$
$$u(۰, t) = ۰ \tag{۱۳}$$
$$u(\pi, t) = ۰ \tag{۱۴}$$
$$u(x, ۰) = f(x) \tag{۱۵}$$
$$u_t(x, ۰) = g(x) \tag{۱۶}$$

حل ابتدا می‌خواهیم جواب معادله‌ی (۱۲) که در شرایط مرزی (۱۳) و (۱۴) صدق می‌کنند را بیابیم. برای یافتن جواب‌های نابدیهی ابتدا جواب‌هایی به صورت حاصل‌ضرب دو تابع بر حسب x و t را می‌یابیم، یعنی قرار می‌دهیم

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

داریم

$$u_{tt}(x,t) = X(t)T''(t), \quad u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$$

و در نتیجه

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

از این‌رو

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}.$$

چون سمت چپ رابطه‌ی بالا تابعی بر حسب t و طرف چپ آن تابعی بر حسب x است، پس باید مقداری ثابت باشد، یعنی

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\sigma.$$

که نتیجه می‌دهد

$$X'' + \sigma X = 0, \quad T'' + a^2\sigma T = 0.$$

اکنون چون $u(0,t) = 0$، داریم $X(0)T(t) = 0$ و چون $T(t)$ متحد با صفر نیست، داریم

$$X(0) = 0.$$

از طرف دیگر چون $u(\pi,t) = 0$، داریم $X(\pi)T(t) = 0$ و چون $T(t)$ متحد با صفر نیست، داریم

$$X(\pi) = 0.$$

از این‌رو یک مسأله به صورت زیر برای $X(x)$ داریم

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = 0, & 0 < x < \pi \\ X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases} \qquad (۱۷)$$

مقادیر و توابع ویژه مسأله‌ی (۱۷) عبارتند از

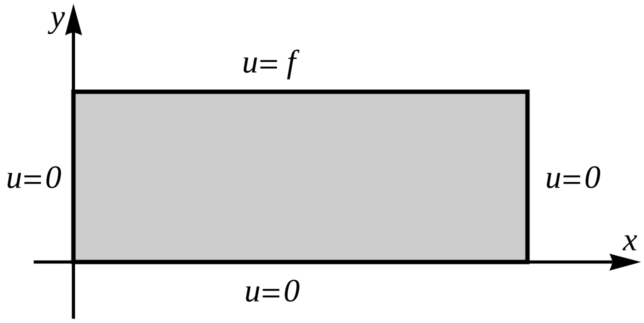
$$\sigma_n = \lambda_n^2 = n^2, \quad X_n(x) = \sin nx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

اکنون جواب‌های متناظر $T(t)$ را به دست می‌آوریم. چون داریم $T'' + a^2\sigma T = 0$، متناظر $\sigma = \lambda^2 = n^2$ داریم

$$T_n(t) = A_n \cos ant + B_n \sin ant.$$

در نتیجه جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t)$ که در شرایط مرزی $u(0,t) = 0$ و $u(\pi,t) = 0$ صدق می‌کند عبارتند از

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= X_n(x)T_n(t) \\ &= (A_n \cos ant + B_n \sin ant)\sin nx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$



شکل ۲: معادله‌ی لاپلاس روی یک مستطیل

از این‌رو کلی‌ترین جواب (جواب عمومی) معادله‌ی (۱۲) که در شرایط مرزی (۱۳) و (۱۴) صدق می‌کند عبارت است از

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos ant+B_n\sin ant)\sin nx.$$

اکنون با استفاده از شرایط اولیه‌ی (۱۵) و (۱۶) ضرایب مجهول را تعیین می‌کنیم. چون داریم

$$f(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin nx.$$

و در نتیجه A_n ضریب سری فوریه‌ی سینوسی $f(x)$ است، یعنی

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx.$$

علاوه بر آن چون داریم

$$g(x)=u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}anB_n\sin nx.$$

و در نتیجه anB_n ضریب سری فوریه‌ی سینوسی $g(x)$ است، یعنی

$$B_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^{\pi}g(x)\sin nx\,dx.\quad\blacksquare$$

مثال ۲۹. *معادله لاپلاس با شرایط مرزی زیر را حل کنید. (شکل ۲ را ببینید.)*

$$u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<a,\ 0<y<b \qquad (۱۸)$$

$$u(0,y)=0 \qquad (۱۹)$$

$$u(a,y)=0 \qquad (۲۰)$$

$$u(x,0)=0 \qquad (۲۱)$$

$$u(x,b)=f(x) \qquad (۲۲)$$

حل ابتدا جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی (۱۸) که در شرایط مرزی (۱۹)-(۲۱) صدق می‌کند را می‌یابیم. قرار می‌دهیم $u(x,y)=X(x)Y(y)$. چون $u(0,y)=0$، داریم $X(0)Y(y)=0$ و چون $Y(y)$ متحد با صفر نیست، داریم

$$X(0)=0.$$

به همین صورت داریم

$$X(a)=0,\quad Y(0)=0.$$

اکنون چون $u_{xx}(x,y) = X''(x)Y(y)$ و $u_{yy}(x,y) = X(y)Y''(y)$، با قرار دادن در معادله خواهیم داشت

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0.$$

از این‌رو

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\sigma,$$

که در آن σ مقداری ثابت است. در نتیجه

$$X'' + \sigma X = 0, \qquad Y'' - \sigma Y = 0.$$

از این‌رو یک مسأله‌ی مقدار مرزی به صورت زیر برای $X(x)$ داریم

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = 0, & 0 < x < a \\ X(0) = 0 \\ X(a) = 0 \end{cases} \qquad (۲۳)$$

مقادیر و توابع ویژه مسأله‌ی (۲۳) عبارتند از

$$\sigma_n = \lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{a}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

اکنون جواب‌های متناظر $Y(y)$ را می‌یابیم. جواب عمومی $Y'' - \sigma Y = 0$ عبارت است از

$$Y(y) = c_1 \cosh\lambda y + c_2 \sinh\lambda y.$$

چون $Y(0) = 0$ داریم $Y(y) = c_2 \sinh\lambda x$. از این‌رو جواب متناظر $\sigma_n = \lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ عبارت است از

$$Y_n(y) = \sinh\lambda_n y.$$

در نتیجه جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی (۱۸) که در شرایط مرزی (۱۹)-(۲۱) صدق می‌کند عبارتند از

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = \sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

از این‌رو کلی‌ترین جواب (جواب عمومی) معادله‌ی (۱۸) که در شرایط مرزی (۱۹)-(۲۱) صدق می‌کند عبارت است از

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}.$$

اکنون با استفاده از شرط اولیه‌ی (۲۲) ضرایب مجهول را تعیین می‌کنیم. چون داریم

$$f(x) = u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi b}{a}$$

با استفاده از سری فوریه‌ی سینوسی $f(x)$، داریم

$$\sinh\frac{n\pi b}{a}B_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx.$$

با مشخص بودن $f(x)$ ضرایب B_n و در نتیجه جواب مسأله به دست می‌آید. ■

قسمتی از فصل‌های ۴ و ۵، معادلات با مشتقات جزئی همگن در حالت نامتناهی

جلسه ششم ۲۹ تیرماه ۱۳۹۳

در حالتی که فاصله‌ی مورد بررسی نامتناهی باشد، شرط مرزی همگنی که باید در نظر گرفته شود شرط کراندار بودن تابع مجهول u است. در مثال‌های بعد این مطلب را تشریح می‌کنیم.

مثال ۳۰. *(معادله‌ی گرما برای میله‌ی نامتناهی) معادله با شرایط مرزی زیر را حل کنید*

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty \quad t > 0 \tag{۲۴}$$

$$u(x,t) \text{ کران‌دار وقتی } x \to \pm\infty \tag{۲۵}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{۲۶}$$

حل ابتدا جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی (۲۴) که در شرایط مرزی (۲۵) صدق می‌کند را می‌یابیم. قرار می‌دهیم $u(x,t) = X(x)T(t)$. در این صورت $u_t(x,t) = X(t)T'(t)$ و $u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$ و با جای‌گذاری در معادله خواهیم داشت

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\sigma,$$

که در آن σ مقدار ثابت است. از این‌رو داریم

$$X'' + \sigma X = 0, \qquad T' = -a^2\sigma T.$$

اکنون چون وقتی $x \to \pm\infty$، $u(x,t)$ کران‌دار است، پس $x \to \pm\infty$، $X(x)$ کران‌دار است از این‌رو یک مسأله‌ی مقدار مرزی به صورت زیر برای $X(x)$ داریم

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = 0, & -\infty < x < +\infty \\ X(x) \text{ متناهی وقتی } x \to \pm\infty \end{cases} \tag{۲۷}$$

برای یافتن جواب‌های غیربدیهی مسأله بالا دو حالت برای σ در نظر می‌گیریم

حالت اول: $\sigma = -\lambda^2$، که در آن $\lambda > 0$. در این حالت مسأله‌ی (۲۷) به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{cases} X'' - \lambda^2 X = 0, & -\infty < x < +\infty \\ X(x) \text{ متناهی وقتی } x \to \pm\infty \end{cases}$$

جواب عمومی معادله‌ی $X'' - \lambda^2 X = 0$ عبارت است از

$$X(x) = c_1e^{\lambda x} + c_2e^{-\lambda x}.$$

چون $\lim_{x\to+\infty} e^{\lambda x} = +\infty$ و $X(x)$ ، وقتی $x \to +\infty$، کران‌دار است، داریم $c_1 = 0$ و در نتیجه $X(x) = c_2e^{-\lambda x}$. چون $\lim_{x\to-\infty} e^{-\lambda x} = +\infty$ و $X(x)$ ، وقتی $x \to -\infty$، کران‌دار است داریم $c_2 = 0$. از این‌رو $X(x) = 0$ و در این حالت فقط جواب بدیهی داریم.

حالت دوم: $\sigma = \lambda^2$، که در آن $\lambda > 0$. در این حالت مسأله‌ی (۲۷) به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, & -\infty < x < +\infty \\ X(x) \text{ متناهی وقتی } x \to \pm\infty \end{cases}$$

جواب عمومی معادله‌ی $X''+\lambda^2X=0$ عبارت است از

$$X(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x.$$

چون $|\sin\lambda x|\leq 1$ و $|\cos\lambda x|\leq 1$، تابع $X(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x$ وقتی $x\to\pm\infty$ کران‌دار است، پس به ازای هر λ جواب $X_\lambda(x)=A_\lambda\cos\lambda x+B_\lambda\sin\lambda x$ یک جواب غیر بدیهی از مسأله‌ی (۲۷) است. اکنون جواب‌های متناظر $T(t)$ را می‌یابیم. چون $T'=-a^2\sigma T$، متناظر $\sigma=\lambda^2$ داریم $T_\lambda(t)=e^{-a^2\lambda^2t}$. در نتیجه جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی (۲۴) که در شرایط مرزی (۲۵) صدق می‌کند عبارتند از

$$\begin{aligned} u_\lambda(x,t) &= X_\lambda(x)T_\lambda(t)\\ &= e^{-a^2\lambda^2t}(A_\lambda\cos\lambda x+B_\lambda\sin\lambda x),\quad \lambda>0. \end{aligned}$$

از این‌رو کلی‌ترین جواب (جواب عمومی) معادله‌ی (۲۴) که در شرایط مرزی (۲۵) صدق می‌کند عبارت است از

$$u(x,t)=\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t}(A_\lambda\cos\lambda x+B_\lambda\sin\lambda x)\,d\lambda.$$

اکنون با استفاده از شرط اولیه‌ی (۲۶) ضرایب مجهول را تعیین می‌کنیم. چون داریم

$$f(x)=u(x,0)=\int_0^{+\infty}(A_\lambda\cos\lambda x+B_\lambda\sin\lambda x)\,d\lambda$$

و در نتیجه با استفاده از انتگرال فوریه $f(x)$ ضرایب را می‌یابیم:

$$A_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\lambda x\,dx,\qquad B_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\,dx.$$

با مشخص بودن $f(x)$ ضرایب A_λ و B_λ؛ و در نتیجه جواب مسأله به دست می‌آید. ■

مثال ۳۱. *(معادله‌ی گرمای نیمه متناهی) معادله با شرایط مرزی زیر را حل کنید*

$$u_t=a^2u_{xx},\quad 0<x<+\infty,\quad t>0 \tag{۲۸}$$

$$u(0,t)=0 \tag{۲۹}$$

$$u(x,t)\ \text{کران‌دار وقتی}\ x\to+\infty \tag{۳۰}$$

$$u(x,0)=f(x) \tag{۳۱}$$

حل ابتدا جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی (۲۸) که در شرایط مرزی (۲۹)-(۳۰) صدق می‌کند را دست می‌آوریم. قرار می‌دهیم $u(x,t)=X(x)T(t)$. در این صورت داریم $u_t(x,t)=X(t)T'(t)$ و $u_{xx}(x,t)=X''(x)T(t)$ و با جای‌گذاری در معادله خواهیم داشت

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\sigma,$$

که در آن σ مقدار ثابت است. از این‌رو داریم

$$X''+\sigma X=0,\qquad T'=-a^2\sigma T.$$

اکنون چون $u(0,t)=0$، داریم $X(0)T(t)=0$ و چون $T(t)$ متحد با صفر نیست، داریم

$$X(0)=0.$$

از طرف دیگر چون وقتی $x \to +\infty$، $u(x,t)$ کران‌دار است، پس $x \to +\infty$، $X(x)$ کران‌دار است از این‌رو یک مسأله‌ی مقدار مرزی به صورت زیر برای $X(x)$ داریم

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = 0, & 0 < x < +\infty \\ X(0) = 0 \\ X(x) \text{ متناهی وقتی } x \to +\infty \end{cases} \tag{۳۲}$$

برای یافتن جواب‌های غیربدیهی مسأله بالا دو حالت برای σ در نظر می‌گیریم

حالت اول: $\sigma = -\lambda^2$، که در آن $\lambda > 0$. در این حالت مسأله‌ی (۳۲) به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{cases} X'' - \lambda^2 X = 0, & 0 < x < +\infty \\ X(0) = 0 \\ X(x) \text{ متناهی وقتی } x \to +\infty \end{cases}$$

جواب عمومی معادله‌ی $X'' - \lambda^2 X = 0$ عبارت است از

$$X(x) = c_1 \cosh \lambda x + c_2 \sinh \lambda x.$$

چون $X(0) = 0$ داریم $c_1 = 0$ و در نتیجه $X(x) = c_2 \sinh \lambda x$. اکنون چون $X(x)$، وقتی که $x \to +\infty$، کران‌دار است، داریم $c_2 = 0$، زیرا $\lim_{x\to+\infty} \sinh \lambda x = +\infty$. از این‌رو $X(x) = 0$ و در این حالت فقط جواب بدیهی داریم.

حالت دوم: $\sigma = \lambda^2$، که در آن $\lambda > 0$. در این حالت مسأله‌ی (۳۲) به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, & 0 < x < +\infty \\ X(0) = 0 \\ X(x) \text{ متناهی وقتی } x \to +\infty \end{cases}$$

جواب عمومی معادله‌ی $X'' + \lambda^2 X = 0$ عبارت است از

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x.$$

چون $X(0) = 0$ داریم $c_1 = 0$ و در نتیجه داریم $X(x) = c_2 \sin \lambda x$. اکنون چون $X(x)$ وقتی $x \to +\infty$ کران‌دار است، پس به ازای هر λ جواب $X_\lambda(x) = \sin \lambda x$ یک جواب غیر بدیهی از مسأله‌ی (۳۲) است. اکنون جواب‌های متناظر $T(t)$ را می‌یابیم. چون $T' = -a^2 \sigma T$، متناظر $\sigma = \lambda^2$ داریم $T_\lambda(t) = e^{-a^2\lambda^2 t}$. در نتیجه جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی (۲۸) که در شرایط مرزی (۲۹) و (۳۰) صدق می‌کند عبارتند از

$$\begin{aligned} u_\lambda(x,t) &= X_\lambda(x) T_\lambda(t) \\ &= e^{-a^2\lambda^2 t} \sin \lambda x, \qquad \lambda > 0. \end{aligned}$$

از این‌رو کلی‌ترین جواب (جواب عمومی) معادله‌ی (۲۸) که در شرایط مرزی (۲۹) و (۳۰) صدق می‌کند عبارت است از

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^{+\infty} B_\lambda X_\lambda(x) T_\lambda(t)\, d\lambda \\ &= \int_0^{+\infty} B_\lambda e^{-a^2\lambda^2 t} \sin \lambda x\, d\lambda. \end{aligned}$$

اکنون با استفاده از شرط اولیه‌ی (۳۱) ضرایب مجهول B_λ را تعیین می‌کنیم. چون داریم

$$f(x) = u(x,0) = \int_0^{+\infty} B_\lambda \sin \lambda x \, d\lambda$$

و در نتیجه B_λ ضریب انتگرال فوریه‌ی سینوسی $f(x)$ است، یعنی

$$B_\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\, dx.$$

بنابراین

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} f(z)e^{-a^2\lambda^2 t}\sin\lambda z \sin\lambda x\, dz\right] d\lambda.$$

با مشخص بودن $f(x)$ ضرایب B_λ و در نتیجه جواب مسأله به دست می‌آید. ■

مثال ۳۲. *معادله موج نیمه متناهی با شرایط مرزی داده شده را حل کنید*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < +\infty \quad t > 0 \tag{۳۳}$$

$$u_x(0,t) = 0 \tag{۳۴}$$

$$u(x,t) \text{ متناهی وقتی که } x \to +\infty \tag{۳۵}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{۳۶}$$

$$u_t(x,0) = g(x) \tag{۳۷}$$

حل ابتدا می‌خواهیم جواب معادله‌ی (۳۳) را که در شرایط مرزی (۳۴)-(۳۵) صدق می‌کند را بیابیم. برای یافتن جواب‌های نابدیهی مسأله ابتدا جواب‌هایی به صورت حاصل‌ضرب دو تابع بر حسب x و t را می‌یابیم، یعنی قرار می‌دهیم $u(x,t) = X(x)T(t)$. در این صورت خواهیم داشت $u_{tt}(x,t) = X(t)T''(t)$ و $u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$ و در نتیجه $X(x)T''(t) = a^2X''(x)T(t)$. از این‌رو

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\sigma,$$

که در آن σ مقداری ثابت است. در نتیجه

$$X'' + \sigma X = 0, \qquad T'' + a^2\sigma T = 0.$$

اکنون چون $u_x(0,t) = 0$، داریم $X'(0)T(t) = 0$ و چون $T(t)$ متحد با صفر نیست، داریم

$$X'(0) = 0.$$

از طرف دیگر چون وقتی $x \to +\infty$، تابع $u(x,t) = X(x)T(t)$ متناهی است، وقتی $x \to +\infty$ تابع $X(x)$ متناهی است. از این‌رو یک مسأله به صورت زیر برای $X(x)$ داریم

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = 0, 0 < x < +\infty \\ X'(0) = 0 \\ X(x) \text{ متناهی وقتی که } x \to +\infty \end{cases} \tag{۳۸}$$

مانند مثال‌های معادله‌ی گرمای نامتناهی می‌توان دید که $\sigma = \lambda^2$ و به ازای هر $\lambda > 0$ جواب $X_\lambda(x) = \cos\lambda x$ را داریم. اکنون جواب‌های متناظر $T(t)$ را می‌یابیم. چون $T'' + a^2\lambda^2 T = 0$، متناظر $\sigma = \lambda^2$ داریم $T_\lambda(t) = A_\lambda \cos a\lambda t +$

$B_\lambda \sin a\lambda t$. در نتیجه جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی $u_{tt}(x,t) = a^۲ u_{xx}(x,t)$ که در شرایط مرزی $u(۰,t) = ۰$ و $u(x,t)$ متناهی وقتی $x \to +\infty$ صدق می‌کند عبارتند از

$$u_\lambda(x,t) = X_\lambda(x)T_\lambda(t) = (A_\lambda \cos a\lambda t + B_\lambda \sin a\lambda t)\cos \lambda x, \qquad \forall \lambda > ۰.$$

از این‌رو کلی‌ترین جواب (جواب عمومی) معادله‌ی (۳۳) که در شرایط مرزی (۳۴) و (۳۵) صدق می‌کند عبارت است از

$$u(x,t) = \int_۰^{+\infty} (A_\lambda \cos a\lambda t + B_\lambda \sin a\lambda t)\sin \lambda x \, d\lambda.$$

اکنون با استفاده از شرایط اولیه‌ی (۳۶) و (۳۷) ضرایب مجهول را تعیین می‌کنیم. چون داریم

$$f(x) = u(x,۰) = \int_۰^{+\infty} A_\lambda \cos \lambda x \, dx.$$

و در نتیجه A_λ ضریب انتگرال فوریه‌ی کسینوسی $f(x)$ است، یعنی

$$A_\lambda = \frac{۲}{\pi}\int_۰^{+\infty} f(x)\cos \lambda x \, dx.$$

علاوه بر آن چون داریم

$$g(x) = u_t(x,۰) = \int_۰^{+\infty} a\lambda B_\lambda \cos \lambda x \, dx.$$

و در نتیجه λB_λ ضریب انتگرال فوریه‌ی کسینوسی $g(x)$ است، یعنی

$$B_\lambda = \frac{۲}{a\lambda\pi}\int_۰^{+\infty} g(x)\cos \lambda x \, d\lambda. \quad \blacksquare$$

مثال ۳۳. *معادله موج نیمه متناهی با شرایط مرزی داده شده را حل کنید*

$$u_{tt} = a^۲ u_{xx}, \quad ۰ < x < +\infty, \ t > ۰ \tag{۳۹}$$

$$u(۰,t) = ۰, \ t > ۰ \tag{۴۰}$$

$$u(x,۰) = f(x), \ ۰ < x < +\infty \tag{۴۱}$$

$$u_t(x,۰) = g(x), \ ۰ < x < +\infty \tag{۴۲}$$

$u(x,t)$ *کراندار وقتی* $x \to +\infty$

حل قرار می‌دهیم $u(x,t) = X(x)T(t)$. با قرار دادن در معادله، مطابق معمول خواهیم داشت

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{aT} = -\sigma,$$

که در آن σ مقداری ثابت است، و در نتیجه

$$X'' + \sigma X = ۰ \tag{۴۳}$$

$$T'' + a^۲\sigma T = ۰ \tag{۴۴}$$

با توجه به شرط مرزی $X(۰) = ۰$ و کرانداری $X(x)$، حالت $\sigma < ۰$ رد می‌شود. بنابراین $\sigma = \lambda^۲ > ۰$. از این‌رو

$$X(x) = A\cos \lambda x + B\sin \lambda x.$$

چون $X(\circ) = \circ$ داریم $A = \circ$. پس به ازای هر $\lambda > \circ$، یک جواب

$$X_\lambda(x) = \sin \lambda x$$

از (۴۳) داریم. به ازای $\sigma = \lambda^{۲}$ جواب‌های (۴۴) عبارتند از

$$T_\lambda(t) = A_\lambda \cos a\lambda t + B_\lambda \sin a\lambda t, \qquad \lambda > \circ.$$

چون مقادیر λ به صورت پیوسته هستند، با انتگرال گرفتن از جواب‌های حاصل‌ضربی جواب مسأله‌ی (۳۹)-(۴۰) را می‌یابیم

$$u(x,t) = \int_\circ^{+\infty} (A_\lambda \cos a\lambda t + B_\lambda \sin a\lambda t) \sin \lambda x \, d\lambda.$$

با استفاده از (۴۱) و (۴۲) ضرایب $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ را می‌یابیم

$$\begin{aligned} f(x) &= u(x,\circ) = \int_\circ^{+\infty} A_\lambda \sin \lambda x \, d\lambda \\ g(x) &= u_t(x,\circ) = \int_\circ^{\infty} a\lambda B_\lambda \sin \lambda x \, d\lambda. \end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از انتگرال فوریه‌ی سینوسی f و g، ضرایب $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ عبارتند از

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \frac{۲}{\pi} \int_\circ^{+\infty} f(z) \sin \lambda z \, dz \\ B_\lambda &= \frac{۲}{\pi a\lambda} \int_\circ^{+\infty} g(z) \sin \lambda z \, dz. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

مثال ۳۴. *معادله لاپلاس با شرایط مرزی زیر را حل کنید*

$$u_{xx} + u_{yy} = \circ, \quad \circ < x < a, \quad \circ < y < b \tag{۴۵}$$

$$u(\circ, y) = f(y) \tag{۴۶}$$

$$u(a, y) = g(y) \tag{۴۷}$$

$$u_y(x, \circ) = \circ \tag{۴۸}$$

$$u_y(x, b) = \circ \tag{۴۹}$$

حل ابتدا جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی (۴۵) که در شرایط مرزی (۴۸)-(۴۹) صدق می‌کند را می‌یابیم. قرار می‌دهیم $u(x,y) = X(x)Y(y)$. چون $u_y(x,\circ) = \circ$، داریم $X(x)Y'(\circ) = \circ$ و بنابراین

$$Y'(\circ) = \circ.$$

به همین صورت داریم

$$Y'(b) = \circ.$$

اکنون چون $u_{xx}(x,y) = X''(x)Y(y)$ و $u_{yy}(x,y) = X(y)Y''(y)$، با قرار دادن در معادله خواهیم داشت

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \sigma,$$

که در آن σ مقداری ثابت است. در نتیجه

$$X'' - \sigma X = 0, \qquad Y'' + \sigma Y = 0.$$

از این‌رو یک مسأله‌ی مقدار مرزی به صورت زیر برای $Y(y)$ داریم

$$\begin{cases} Y'' + \sigma Y = 0, & 0 < y < b \\ Y'(0) = 0 \\ Y'(b) = 0 \end{cases} \tag{۵۰}$$

مقادیر و توابع ویژه مسأله‌ی (۵۰) عبارتند از

$$\sigma_0 = \lambda_0 = 0, \quad Y_0(y) = 1$$
$$\sigma_n = \lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad Y_n(y) = \cos\frac{n\pi y}{b}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots.$$

اکنون جواب‌های متناظر $X(x)$ را می‌یابیم. برای $\sigma = 0$ جواب عمومی $X'' = 0$ عبارت است از

$$X_0(x) = A_0 + B_0 x.$$

برای $\sigma_n = \lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$ جواب عمومی $X'' - \lambda^2 X = 0$ عبارت است از

$$X_n(x) = A_n \cosh\lambda_n x + B_n \sinh\lambda_n x.$$

در نتیجه جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی (۴۵) که در شرایط مرزی (۲۱) و (۲۲) صدق می‌کند عبارتند از

$$u_0(x, y) = X_0(x)Y_0(y) = A_0 + B_0 x$$
$$u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = (A_n \cosh\lambda_n x + B_n \sinh\lambda_n x)\cos\lambda_n y, \ n = 1, 2, \dots.$$

از این‌رو کلی‌ترین جواب (جواب عمومی) معادله‌ی (۴۵) که در شرایط مرزی (۴۸) و (۴۹) صدق می‌کند عبارت است از

$$u(x, y) = A_0 + B_0 x + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cosh\lambda_n x + B_n \sinh\lambda_n x)\cos\frac{n\pi y}{b}.$$

اکنون با استفاده از شرایط اولیه‌ی (۴۶) و (۴۷) ضرایب مجهول را تعیین می‌کنیم. چون داریم

$$f(y) = u(0, y) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi y}{b}.$$

با استفاده از سری فوریه‌ی کسینوسی $f(y)$ داریم

$$A_0 = \frac{1}{b}\int_0^b f(y)\,dy, \qquad A_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\cos\lambda_n y\,dy.$$

به همین صورت چون داریم

$$g(y) = u(a, y) = A_0 + B_0 a + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cosh\lambda_n a + B_n \sinh\lambda_n a)\cos\lambda_n y$$

با استفاده از سری فوریه‌ی کسینوسی $g(y)$ به دست می‌آوریم

$$A_0 + B_0 a = \frac{1}{b}\int_0^b g(y)\,dy,$$
$$A_n \cosh\lambda_n a + B_n \sinh\lambda_n a = \frac{2}{b}\int_0^b g(y)\cos\lambda_n y\,dy$$

و بنابراین

$$B_\circ = -\frac{۱}{a}A_\circ + \frac{۱}{ab}\int_\circ^b g(y)\,dy,$$

$$B_n = -A_n\frac{\cosh\lambda_n a}{\sinh\lambda_n a} + \frac{۲}{b\sinh\lambda_n a}\int_\circ^b g(y)\cos\lambda_n y\,dy. \quad \blacksquare$$

مثال ۳۵. *معادله لاپلاس با شرایط داده شده را حل کنید*

$$u_{xx} + u_{yy} = \circ, \quad \circ < x < a, \quad y > \circ \qquad (۵۱)$$

$$u(\circ, y) = \circ \qquad (۵۲)$$

$$u(a, y) = \circ \qquad (۵۳)$$

$$u(x,y) \text{ کران‌دار وقتی } y \to +\infty \qquad (۵۴)$$

$$u(x, \circ) = f(x) \qquad (۵۵)$$

حل ابتدا جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی (۵۱) که در شرایط (۵۲)-(۵۴) صدق می‌کند را می‌یابیم. قرار می‌دهیم $u(x,y) = X(x)Y(y)$. چون $u(\circ,y) = \circ$، داریم $X(\circ)Y(y) = \circ$ و در نتیجه

$$X(\circ) = \circ.$$

به همین صورت داریم

$$X(a) = \circ, \qquad Y(y) \text{ کران‌دار وقتی } y \longrightarrow +\infty.$$

اکنون چون $u_{xx}(x,y) = X''(x)Y(y)$ و $u_{yy}(x,y) = X(x)Y''(y)$، با قرار دادن در معادله خواهیم داشت

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = \circ.$$

از این‌رو

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\sigma,$$

که در آن σ مقداری ثابت است. بنابراین

$$X'' + \sigma X = \circ, \qquad Y'' - \sigma Y = \circ.$$

از این‌رو یک مسأله‌ی مقدار مرزی به صورت زیر برای $X(x)$ داریم

$$\begin{cases} X'' + \sigma X = \circ, \quad \circ < x < a \\ X(\circ) = \circ \\ X(a) = \circ \end{cases} \qquad (۵۶)$$

مقادیر و توابع ویژه مسأله‌ی (۵۶) عبارتند از

$$\sigma_n = \lambda_n^۲ = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^۲, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{a}, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots.$$

اکنون جواب‌های متناظر $Y(y)$ را می‌یابیم. جواب عمومی $Y'' - \lambda^۲ Y = \circ$ عبارت است از

$$Y(y) = c_۱ e^{\lambda y} + c_۲ e^{-\lambda y}.$$

چون وقتی $y \longrightarrow \infty$، $Y(y)$ متناهی است و $\lim_{y\to+\infty} e^{\lambda y} = +\infty$ ، داریم $Y(y) = c_۲ e^{-\lambda y}$. پس $Y_n(y) = e^{-\lambda_n y}$ و در نتیجه جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی (۵۱) که در شرایط (۵۲)-(۵۴) صدق می‌کنند عبارتند از

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = e^{-\lambda_n y}\sin\frac{n\pi x}{a}, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \dots.$$

از این‌رو کلی‌ترین جواب (جواب عمومی) معادله‌ی (۵۱) که در شرایط مرزی (۵۲)-(۵۴) صدق می‌کند عبارت است از

$$u(x,y) = \sum_{n=۱}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n y}\sin\frac{n\pi x}{a}.$$

اکنون با استفاده از شرط اولیه‌ی (۵۵) ضرایب مجهول را تعیین می‌کنیم. چون داریم

$$f(x) = u(x,\circ) = \sum_{n=۱}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{a}.$$

با استفاده از سری فوریه‌ی سینوسی $f(x)$ داریم

$$A_n = \frac{۲}{a}\int_\circ^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

و بنابراین

$$A_n = \frac{۲}{a}\int_\circ^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx. \quad \blacksquare$$

مثال ۳۶. *معادله لاپلاس با شرایط داده شده را حل کنید*

$$u_{xx} + u_{yy} = \circ, \quad \circ < x < a, \quad y > \circ \qquad (۵۷)$$

$$u(\circ, y) = \circ \qquad (۵۸)$$

$$u(a, y) = f(y) \qquad (۵۹)$$

$$u(x, \circ) = \circ \qquad (۶۰)$$

$$u(x,y) \text{ کران‌دار وقتی } y \to +\infty \qquad (۶۱)$$

حل ابتدا جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی (۵۷) که در شرایط (۵۸)، (۶۰) و (۶۱) صدق می‌کند را می‌یابیم. قرار می‌دهیم $u(x,y) = X(x)Y(y)$. چون $u(\circ,y) = \circ$، داریم $X(\circ)Y(y) = \circ$ و در نتیجه

$$X(\circ) = \circ.$$

به همین صورت داریم

$$Y(\circ) = \circ, \qquad Y(y) \text{ کران‌دار وقتی } y \to +\infty.$$

اکنون چون $u_{xx}(x,y) = X''(x)Y(y)$ و $u_{yy}(x,y) = X(y)Y''(y)$، با قرار دادن در معادله خواهیم داشت

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \sigma,$$

که در آن σ مقداری ثابت است. در نتیجه

$$X'' - \sigma X = \circ, \qquad Y'' + \sigma Y = \circ.$$

از این‌رو یک مسأله‌ی مقدار مرزی به صورت زیر برای $Y(y)$ داریم

$$\begin{cases} Y'' + \sigma Y = ۰, y > ۰ \\ Y(۰) = ۰ \\ Y(y) \text{ کران‌دار وقتی } y \to +\infty \end{cases} \qquad (۶۲)$$

به سادگی می‌توان دید به ازای هر $۰ < \lambda$ مسأله‌ی (۶۲) دارای جواب نابدیهی

$$Y_\lambda(y) = \sin \lambda y$$

است. اکنون جواب‌های متناظر $X(x)$ را می‌یابیم. جواب عمومی معادله‌ی $X'' - \lambda^۲ X = ۰$ عبارت است از

$$X(x) = c_۱ \cosh \lambda x + c_۲ \sinh \lambda x.$$

چون $X(۰) = ۰$ داریم $X(x) = c_۲ \sinh \lambda x$. پس $X_\lambda(x) = \sinh \lambda x$ و در نتیجه جواب‌های حاصل‌ضربی معادله‌ی (۵۷) که در شرایط (۵۸)، (۶۰) و (۶۱) صدق می‌کنند عبارتند از

$$u_\lambda(x, y) = X_\lambda(x) Y_\lambda(y) = \sinh \lambda x \sin \lambda y, \quad \lambda > ۰.$$

از این‌رو کلی‌ترین جواب (جواب عمومی) معادله‌ی (۵۷) که در شرایط (۵۸)، (۶۰) و (۶۱) صدق می‌کند عبارت است از

$$u(x, y) = \int_۰^{+\infty} B_\lambda \sinh \lambda x \sin \lambda y \, d\lambda.$$

اکنون با استفاده از شرط اولیه‌ی (۶۱) ضرایب مجهول را تعیین می‌کنیم. چون داریم

$$f(y) = u(a, y) = \int_۰^{+\infty} B_\lambda \sinh \lambda a \sin \lambda y \, d\lambda.$$

با استفاده از انتگرال فوریه‌ی سینوسی $f(y)$ داریم

$$B_\lambda \sinh \lambda a = \frac{۲}{\pi} \int_۰^{+\infty} f(y) \sin \lambda y \, dy$$

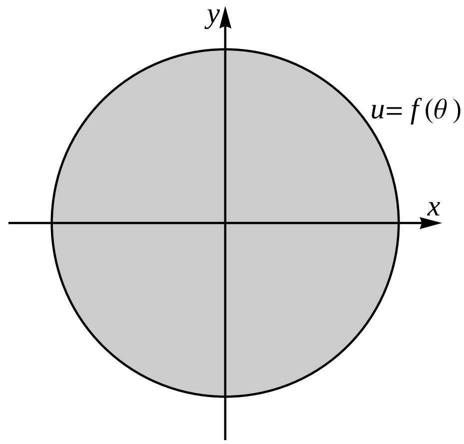
و بنابراین

$$B_\lambda = \frac{۲}{\pi \sinh \lambda a} \int_۰^{+\infty} f(y) \sin \lambda y \, dy. \quad \blacksquare$$

قسمتی از فصل ۴، معادله لاپلاس در مختصات قطبی

جلسه هفتم ۳۰ تیرماه ۱۳۹۳

مثال ۳۷. *دمای مستقل از زمان یک صفحه‌ی دایره‌ای شکل به شعاع a که دمای روی مرز آن $f(\theta)$ است را بیابید.*



شکل ۳: معادله‌ی لاپلاس روی یک دایره

حل باید مسأله‌ی

$$\begin{aligned} &u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0, && r<a\\ &u(a,\theta)=f(\theta), && -\pi\le\theta\le\pi \end{aligned}$$

را حل کنیم. چون زوج‌های (r,θ) و $(r,\theta+2n\pi)$ یک نقطه در صفحه را مشخص می‌کنند، برای این که $u(r,\theta)$ تابع باشد، باید داشته باشیم

$$u(r,\theta)=u(r,\theta+2n\pi),$$

یعنی u باید نسبت به θ تناوبی باشد. شرط تناوبی بودن u نسبت به θ را می‌توان با فرمول‌های

$$\begin{aligned} &u(r,\pi)=u(r,-\pi), && 0<r<a\\ &u_\theta(r,\pi)=u_\theta(r,-\pi), && 0<r<a \end{aligned}$$

نیز بیان کرد. علاوه بر آن وقتی که $r\to 0^+$ باید تابع $u(r,\theta)$ یک تابع کران‌دار باشد. برای جدا کردن متغیرها قرار می‌دهیم $u(r,\theta)=R(r)\varphi(\theta)$. با جای‌گذاری در معادله داریم

$$R''\varphi+\frac{1}{r}R'\varphi+\frac{1}{r^2}R\varphi''=0.$$

بنابراین

$$\frac{r^2R''+rR'}{R}=\frac{-\varphi''}{\varphi}.$$

چون طرف راست معادله‌ی اخیر تابعی بر حسب θ و طرف چپ آن تابعی بر حسب r است، پس باید مقداری ثابت، مثلا برابر σ، باشد. در نتیجه

$$\frac{r^2R''+rR'}{R}=\frac{-\varphi''}{\varphi}=\sigma$$

و داریم

$$\begin{cases} r^{۲}R'' + rR' - \sigma R = ۰ \\ \varphi'' + \sigma\varphi = ۰, \end{cases}$$

حالت اول: $\sigma = ۰$. در این حالت داریم $\varphi'' = ۰$ و در نتیجه $\varphi(\theta) = c_{۱} + c_{۲}\theta$. چون φ باید نسبت به θ تناوبی باشد، داریم $c_{۲} = ۰$ و در نتیجه $\varphi(\theta) = c_{۱}$. اکنون به ازای $\sigma = ۰$، معادله بر حسب R عبارت است از $r^{۲}R'' + rR' = ۰$. این معادله یک معادله‌ی اویلر است و با حل آن داریم $R(r) = a_{۱} + a_{۲}\ln r$. چون وقتی $r \to ۰^{+}$ باید $R(r)$ متناهی باشد، داریم $R(r) = a_{۱}$. بنابراین به ازای $\sigma = ۰$ داریم

$$\varphi_{۰}(\theta) = ۱, \quad R_{۰}(r) = ۱.$$

حالت دوم: $\sigma = -\lambda^{۲}$. در این حالت داریم $\varphi'' - \lambda^{۲}\varphi = ۰$. در نتیجه

$$\varphi(\theta) = c_{۱}\cosh\lambda\theta + c_{۲}\sinh\lambda\theta$$

و چون φ نسبت به θ تناوبی است، داریم $c_{۱} = c_{۲} = ۰$. از این رو در این حالت فقط جواب بدیهی داریم.

حالت سوم: $\sigma = \lambda^{۲}$. در این حالت داریم $\varphi'' + \lambda^{۲}\varphi = ۰$. در نتیجه

$$\varphi(\theta) = c_{۱}\cos\lambda\theta + c_{۲}\sin\lambda\theta$$

و چون φ نسبت به θ تناوبی است، داریم

$$\lambda = n\,, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots.$$

بنابراین

$$\varphi_{n}(\theta) = a_{n}\cos n\theta + b_{n}\sin n\theta.$$

در واقع مسأله‌ی اشتورم-لیوویل

$$\begin{cases} \varphi'' + \sigma\varphi = ۰, \quad -\pi < \theta < \pi \\ \varphi(\pi) = \varphi(-\pi) \\ \varphi'(\pi) = \varphi'(-\pi) \end{cases}$$

را حل کردیم، که در مثال ۲۳ نیز بررسی شد. اکنون به ازای $\sigma = n^{۲}$، معادله بر حسب R عبارت است از $r^{۲}R'' + rR' - n^{۲}R = ۰$. این معادله یک معادله‌ی اویلر است و با حل آن داریم

$$R(r) = c_{۱}r^{n} + c_{۲}r^{-n}.$$

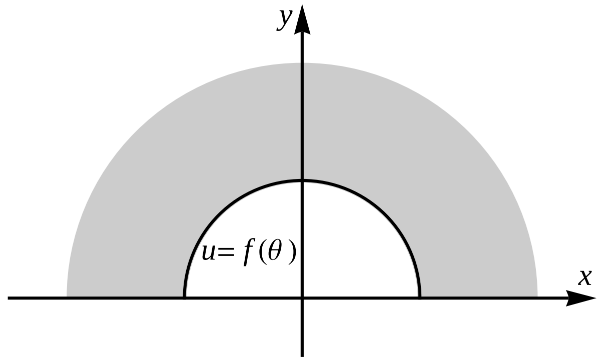
چون وقتی $r \to ۰^{+}$ باید $R(r)$ متناهی باشد، داریم $R(r) = c_{۱}r^{n}$ و در نتیجه

$$R_{n}(r) = r^{n}.$$

بنابراین جواب‌های حاصل‌ضربی مسأله عبارتند از

$$u_{۰}(r,\theta) = R_{۰}(r)\varphi_{۰}(\theta) = ۱$$

$$u_{n}(r,\theta) = (a_{n}\cos n\theta + b_{n}\sin n\theta)d_{n}r^{n}, \quad n = ۱, ۲\ \ldots.$$



شکل ۴: معادله‌ی لاپلاس خارج یک نیم‌دایره

از این‌رو جواب مسأله ترکیب خطی جواب‌های حاصل‌ضربی است:

$$u(r,\theta)=A_{0}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)r^n.$$

با استفاده از شرط اولیه‌ی $u(a,\theta)=f(\theta)$ داریم

$$\begin{aligned} f(\theta) &= u(a,\theta)\\ &= A_{0}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)a^n. \end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از سری فوریه‌ی $f(\theta)$ داریم

$$A_{0}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\,d\theta,\qquad A_n=\frac{1}{a^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\cos n\theta\,d\theta,$$
$$B_n=\frac{1}{a^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\sin n\theta\,d\theta.\quad \blacksquare$$

مثال ۳۸. *معادله‌ی لاپلاس با شرایط مرزی زیر را حل کنید. (شکل ۴ را ببینید.)*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0,\qquad r>a,\quad 0<\theta<\pi$$
$$u(r,0)=0$$
$$u(r,\pi)=0$$
$$u(a,\theta)=f(\theta).$$

حل مشابه قبل باید فرض کنیم که $u(r,\theta)$ برای $r>a$ کران‌دار است. قرار می‌دهیم $u(r,\theta)=R(r)\varphi(\theta)$. با جای‌گذاری در معادله و محاسبات سرراست داریم

$$\varphi R''+\frac{1}{r}\varphi R'+\frac{1}{r^2}\varphi''R=0$$

و در نتیجه

$$\frac{r^2R''+rR'}{R}=\frac{-\varphi''}{\varphi}=\sigma.$$

از این‌رو

$$r^{۲}R'' + rR' - \sigma R = ۰$$

و

$$\begin{cases} \varphi'' + \sigma\varphi = ۰ \\ \varphi(۰) = ۰, \\ \varphi(\pi) = ۰ \end{cases}$$

مقادیر و توابع ویژه‌ی مسأله‌ی بالا عبارتند از

$$\sigma_n = \lambda_n^{۲} = n^{۲}, \qquad \varphi_n(\theta) = \sin n\theta, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \cdots .$$

اکنون به ازای $\sigma_n = n^{۲}$ معادله‌ی اویلر

$$r^{۲}R'' + rR' - n^{۲}R = ۰$$

را داریم که پس از حل آن به دست می‌آید

$$R(r) = c_{۱}r^{n} + c_{۲}r^{-n}.$$

چون وقتی $r \to +\infty$ تابع $u(r,\theta)$ کران‌دار است، باید داشته باشیم $c_{۱} = ۰$. در نتیجه

$$R_n(r) = r^{-n}$$

و بنابراین جواب‌های حاصل‌ضربی مسأله عبارتند از

$$u_n(r,\theta) = r^{-n}\sin n\theta, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \dots .$$

جواب مسأله ترکیب خطی جواب‌های حاصل‌ضربی است:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=۱}^{\infty} A_n r^{-n}\sin n\theta.$$

با استفاده از شرط اولیه‌ی $u(a,\theta) = f(\theta)$ داریم

$$f(\theta) = u(a,\theta) = \sum_{n=۱}^{\infty} A_n a^{-n}\sin n\theta.$$

بنابراین $A_n a^{-n}$ ضریب سری فوریه‌ی سینوسی $f(\theta)$ است

$$A_n = \frac{۲}{a^{-n}\pi}\int_{۰}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta. \quad \blacksquare$$

مثال ۳۹. *معادله‌ی لاپلاس با شرایط مرزی زیر را حل کنید.*

$$\begin{aligned} & u_{rr} + \frac{۱}{r}u_r + \frac{۱}{r^{۲}}u_{\theta\theta} = ۰, && ۰ < r < a, \quad ۰ < \theta < \tfrac{\pi}{۲} \\ & u_\theta(r,۰) = ۰, && ۰ \le r \le a \\ & u(r,\tfrac{\pi}{۲}) = ۰, && ۰ \le r \le a \\ & u(a,\theta) = f(\theta), && ۰ \le \theta \le \tfrac{\pi}{۲} \end{aligned}$$

حل باید وقتی $r \to \circ^+$ تابع $u(r,\theta)$ کران‌دار باشد. برای جدا کردن متغیرها قرار می‌دهیم $u(r,\theta) = R(r)\varphi(\theta)$. با جای‌گذاری در معادله و محاسبات سرراست داریم

$$R''\varphi + \frac{۱}{r}R'\varphi + \frac{۱}{r^۲}R\varphi'' = \circ, \quad \varphi'(\circ) = \circ\,; \quad \varphi\left(\frac{\pi}{۲}\right) = \circ.$$

در نتیجه

$$\frac{r^۲R'' + rR'}{R} = -\frac{\varphi''}{\varphi} = \sigma$$

و داریم

$$r^۲R'' + rR' - \sigma R = \circ$$

و هم‌چنین

$$\begin{cases} \varphi'' + \sigma\varphi = \circ \\ \varphi'(\circ) = \circ, \quad \varphi(\frac{\pi}{۲}) = \circ. \end{cases} \qquad (۵)$$

به سادگی دیده می‌شود که مقادیر و توابع ویژه‌ی مسأله‌ی (۵) عبارتند از

$$\sigma_n = \lambda_n^۲ = (۲n-۱)^۲; \qquad \varphi_n(\theta) = \cos\lambda_n\theta \;\;,\;\; n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

اکنون به ازای $\sigma_n = (۲n-۱)^۲$ داریم

$$r^۲R'' + rR' - (۲n-۱)^۲R = \circ.$$

پس از حل معادله‌ی اویلر بالا داریم

$$R(r) = c_۱r^{۲n-۱} + c_۲r^{-(۲n-۱)}.$$

چون وقتی $r \to \circ^+$ تابع $u(r,\theta)$ کران‌دار است، باید داشته باشیم $c_۲ = \circ$. در نتیجه

$$R_n(r) = r^{۲n-۱}, \quad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

بنابراین جواب‌های حاصل‌ضربی مسأله عبارتند از

$$u_n(r,\theta) = r^{۲n-۱}\; \cos(۲n-۱)\theta, \qquad = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

و جواب مسأله ترکیب خطی جواب‌های حاصل‌ضربی است:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=۱}^{\infty} A_n r^{۲n-۱}\cos(۲n-۱)\theta.$$

با استفاده از شرط اولیه‌ی $u(a,\theta) = f(\theta)$ داریم

$$f(\theta) = u(a,\theta) = \sum_{n=۱}^{\infty} A_n a^{۲n-۱}\cos(۲n-۱)\theta.$$

بنابراین باید سری فوریه‌ی $f(\theta)$ را نسبت به مضارب فرد $\cos$ بیابیم. ضرایب این سری فوریه عبارتند از

$$A_n = \frac{۲}{a^{۲n-۱}\frac{\pi}{۲}}\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}} f(\theta)\cos(۲n-۱)\theta\, d\theta.$$

مثال ۴۰. *معادله‌ی لاپلاس با شرایط مرزی زیر را حل کنید.*

$$\begin{aligned} &u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0, && 1<r<e,\quad 0<\theta<\pi\\ &u(1,\theta)=u(e,\theta), && 0<\theta<\pi\\ &u(r,0)=0, && 1\le r\le e\\ &u(r,\pi)=1, && 1\le r\le e \end{aligned}$$

با قرار دادن $u(r,\theta)=R(r)\varphi(\theta)$ ملاحظه می‌کنیم که شرایط مرزی همگن عبارتند از $R(1)=R(e)=0$، و $\varphi(0)=0$. با قرار دادن در معادله خواهیم داشت

$$R''\varphi+\frac{1}{r}R'\varphi+\frac{1}{r^2}R\varphi''=0.$$

بنابراین

$$-\frac{r^2R''+rR'}{R}=\frac{\varphi''}{\varphi}.$$

چون طرف راست معادله‌ی اخیر تابعی بر حسب θ و طرف چپ آن تابعی بر حسب r است، پس باید مقداری ثابت، مثلا برابر σ، باشد. در نتیجه

$$\begin{cases} r^2R''+rR'+\sigma R=0\\ R(1)=R(e)=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\varphi''-\sigma\varphi=0\\ \varphi(0)=0\end{cases}$$

در این‌جا مسأله‌ی اشتورم-لیوویل معادله‌ی اویلر بر حسب R است. با ضرب معادله بر حسب R در $\mu=\frac{1}{r^2}e^{\int\frac{1}{r}dr}=\frac{1}{r}$ صورت استاندارد آن به دست می‌اید:

$$rR''+R'+\frac{\sigma}{r}R=0,$$

یعنی $(rR')'+\frac{\sigma}{r}=0$. بنابراین توابع ویژه‌ی مسأله نسبت به تابع وزن $\frac{1}{r}$ متعامد هستند. اکنون مقادیر و توابع ویژه را می‌یابیم. چون معادله‌ی شاخص معادله‌ی $r^2R''+rR'+\sigma R=0$ (که با فرض $R(r)=r^\alpha$ به دست می‌آید) عبارت است از $\alpha^2+\sigma=0$، پس باید سه حالت در نظر بگیریم:

حالت اول: $\sigma=0$. در این حالت داریم $r^2R''+rR'=0$. در نتیجه

$$R(r)=c_1+c_2\ln r.$$

چون $R(1)=0$، داریم $c_1=0$ و در نتیجه $R(r)=c_2\ln r$. چون $R(e)=0$، داریم $c_2=0$ و در نتیجه $R(r)=0$. از این‌رو در این حالت جواب بدیهی داریم.

حالت دوم: $\sigma=-\lambda^2$. در این حالت داریم $r^2R''+rR'-\lambda^2R=0$. در نتیجه

$$R(r)=c_1r^\lambda+c_2r^{-\lambda}.$$

چون $R(1)=0$، داریم $c_1+c_2=0$ و چون $R(e)=0$، داریم $c_1e^\lambda+c_2e^{-\lambda}=0$ و در نتیجه $c_1=c_2=0$. پس در این حالت نیز جواب بدیهی داریم.

حالت سوم: $\sigma=-\lambda^2$. در این حالت داریم $r^2R''+rR'+\lambda^2R=0$. در نتیجه
$$R(r)=c_1\cos(\lambda\ln r)+c_2\sin(\lambda\ln r).$$

چون $R(1)=0$، داریم $c_1=0$ و در نتیجه $R(r)=c_2\sin(\lambda\ln r)$. چون $R(e)=0$، داریم $c_2\sin(\lambda)=0$ و در نتیجه برای داشتن جواب نابدیهی باید داشته باشیم $\lambda=n\pi$، $n=1,2,\ldots$. بنابراین مقادیر و توابع ویژه‌ی مسأله عبارتند از
$$\sigma_n=\lambda_n^2=(n\pi)^2,\qquad R_n(r)=\sin(n\pi\ln r).$$

در این حالت مسأله بر حسب θ عبارت است از
$$\begin{cases}\varphi''-\lambda_n^2\varphi=0\\ \varphi(0)=0,\end{cases}$$

که جواب آن عبارت است از
$$\varphi_n(\theta)=\sinh(\lambda_n\theta).$$

از این‌رو جواب‌های حاصل‌ضربی معادله که در شرایط مرزی همگن صدق می‌کنند، عبارتند از
$$u_n(r,\theta)=R_n(r)\varphi_n(\theta)=\sin(n\pi\ln r)\sinh(n\pi\theta).$$

بنابراین کلی‌ترین جواب مسأله ترکیب خطی جواب‌های حاصل‌ضربی است:
$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\pi\ln r)\sinh(n\pi\theta).$$

با استفاده از شرط اولیه‌ی $u(r,\pi)=1$ داریم
$$1=u(r,\pi)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\pi\ln r)\sinh(n\pi^2).$$

پس با استفاده از سری فوریه‌ی $f(r)=1$ بر حسب مجموعه‌ی متعامد $\{\sin(n\pi\ln r)\}_{n=1}^{\infty}$ نسبت به تابع وزن $\frac{1}{r}$ داریم

$$\begin{aligned}A_n\sinh(n\pi^2)&=\frac{(\sin(n\pi\ln r),1)}{\|\sin(n\pi\ln r)\|^2}=\frac{\displaystyle\int_1^e\sin(n\pi\ln r)\frac{1}{r}\,dr}{\displaystyle\int_1^e\sin^2(n\pi\ln r)\frac{1}{r}\,dr}\\&=\frac{\displaystyle\int_0^\pi\sin(nt)\,dt}{\displaystyle\int_0^\pi\sin^2(nt)\,dt},\qquad t=\pi\ln r\\&=\frac{\frac{1-(-1)^n}{n}}{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi}.\end{aligned}$$

بنابراین
$$A_n=\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi\sinh(n\pi^2)}.$$

ادامه‌ی فصل‌های ۴ و ۵، معادلات با مشتقات جزئی —- (غیرهمگن)
جلسه هشتم ۳۱ تیرماه ۱۳۹۳

در یک مسأله‌ی مقدار مرزی هم و هم معادله ممکن است ناهمگن باشد و هم شرایط مرزی ممکن است ناهمگن باشند. ابتدا حالتی را بررسی می‌کنیم که جمله‌ی غیر همگن در معادله تابعی بر حسب x و شرایط مرزی اعداد ثابت باشند. این حالت را در مثال بعد بررسی می‌کنیم

مثال ۴۱. *معادله‌ی زیر را به معادله‌ای همگن با شرایط مرزی همگن تبدیل کنید.*

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + h(x), \quad 0 < x < L \\ u(0,t) = A \\ u(L,t) = B \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

حل تغییر متغیر $u(x,t) = W(x,t) + \psi(x)$ در نظر می‌گیریم، که در آن تابع ψ را طوری می‌یابیم که مسأله‌ی حاصل بر حسب W همگن باشد. با قرار دادن در معادله خواهیم داشت

$$\begin{cases} W_t = a^2 (W_{xx} + \psi''(x)) + h(x) \\ W(0,t) + \psi(0) = A \\ W(L,t) + \psi(L) = B \\ W(x,0) + \psi(x) = f(x). \end{cases}$$

بنابراین اگر ψ جواب مسأله‌ی

$$\begin{cases} a^2 \psi''(x) + h(x) = 0 \\ \psi(0) = A \\ \psi(L) = B \end{cases}$$

باشد، آن‌گاه معادله‌ای همگن بر حسب W خواهیم داشت:

$$\begin{cases} W_t = a^2 W_{xx} \\ W(0,t) = 0 \\ W(L,t) = 0 \\ W(x,0) = f(x) - \psi(x). \quad \blacksquare \end{cases}$$

در این بخش معادله‌ی موج را بررسی می‌کنیم. ابتدا حالت بسیار ساده ای که جمله‌ی غیرهمگن فقط بر حسب x و شرایط مرزی اعداد ثابت باشند را بررسی می‌کنیم.

مثال ۴۲. *مسأله‌ی ناهمگن زیر را به مسأله‌ای همگن با شرایط مرزی همگن تبدیل کنید*

$$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx} + h(x), \qquad 0 < x < L \\ &u(0,t) = A \\ &u(L,t) = B \\ &u(x,0) = f(x) \\ &u_t(x,0) = g(x). \end{aligned}$$

حل با تغییر متغیر $u(x,t) = W(x,t) + \psi(x)$ و تعیین مناسب مناسب ψ سعی می‌کنیم معادله‌ای همگن بر حسب W بیابیم. با قرار دادن در معادله و شرایط مرزی و اولیه خواهیم داشت

$$\begin{aligned} &W_{tt} = a^2(W_{xx} + \psi''(x)) + h(x) \\ &W(0,t) + \psi(0) = A \\ &W(L,t) + \psi(L) = B \\ &W(x,0) + \psi(x) = f(x) \\ &W_t(x,0) = g(x). \end{aligned}$$

بنابراین اگر ψ جواب مسأله‌ی

$$\begin{aligned} &a^2\psi''(x) + h(x) = 0 \\ &\psi(0) = A \\ &\psi(L) = B \end{aligned}$$

باشد، آن‌گاه مسأله‌ی حاصل بر حسب W، همگن خواهد بود:

$$\begin{aligned} &W_{tt} = a^2 W_{xx} \\ &W(0,t) = W(L,t) = 0 \\ &W(x,0) = f(x) - \psi(x) \\ &W_t(x,0) = g(x). \end{aligned}$$

مثلا اگر مسأله‌ی

$$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin x, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0 \\ &u(0,t) = u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0 \\ &u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \end{aligned}$$

را در اختیار داشته باشیم، با توجه به مثال قبل تابع ψ را طوری تعیین می‌کنیم که

$$\begin{aligned} a^{۲}\psi''(x) + \sin x &= ۰ \\ \psi(۰) = \psi\left(\frac{\pi}{۲}\right) &= ۰. \end{aligned}$$

با حل معادله‌ی بالا خواهیم داشت

$$\psi(x) = \frac{۱}{a^{۲}} \sin x - \frac{۲}{\pi a^{۲}} x.$$

بنابراین اگر قرار دهیم $u(x,t) = W(x,t) + \psi(x)$، آن‌گاه مسأله بر حسب W عبارت است از

$$\begin{aligned} &W_{tt} = a^{۲} W_{xx} \\ &W(۰,t) = W\left(\frac{\pi}{۲}, t\right) = ۰ \\ &W(x,۰) = f(x) - \frac{۱}{a^{۲}} \sin x + \frac{۲}{\pi a^{۲}} x \\ &W_t(x,۰) = g(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

مثال ۴۳. *مسأله‌ی زیر را به یک مسأله‌ی همگن را تبدیل کنید، h عددی ثابت است.*

$$\begin{aligned} &u_{tt} = c^{۲} u_{xx} + h \\ &u(۰,t) = u(L,t) = ۰ \\ &u(x,۰) = u_t(x,۰) = ۰. \end{aligned}$$

حل با قرار دادن $u(x,t) = v(x,t) + S(x)$ دیدیم برای همگن شدن معادله‌ی حاصل بر حسب v باید داشته باشیم

$$\begin{aligned} &c^{۲} S''(x) + h = ۰ \\ &S(۰) = ۰ \\ &S(L) = ۰. \end{aligned}$$

با حل مسأله‌ی اخیر خواهیم داشت

$$S(x) = \frac{-h}{۲c^{۲}} x^{۲} + \frac{hL}{۲c^{۲}} x.$$

از این‌رو مسأله‌ی همگن با شرایط مرزی همگن بر حسب v به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &v_{tt} = c^{۲} v_{xx} \\ &v(x,۰) = ۰ - \left(\frac{-h}{۲c^{۲}} x^{۲} + \frac{hL}{۲c^{۲}}\right) \\ &v_t(x,۰) = ۰ \\ &v(۰,t) = v(L,t) = ۰. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

اکنون حالت کلی‌تر (و مشکل‌تر) را در نظر می‌گیریم. در این حالت جمله‌ی غیرهمگن در معادله می‌تواند بر حسب x و t باشد و علاوه بر آن شرایط مرزی ممکن است بر حسب t باشند. در این حالت ابتدا نشان می‌دهیم که با یک تغییر متغیر می‌توان شرایط مرزی را همگن کرد. به عنوان مثال فرض کنید مسأله‌ی ناهمگن

$$u_t = a^2 u_{xx} + g(x,t), \qquad 0 < x < L \tag{6}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad t > 0 \tag{7}$$

$$u(L,t) = \psi(t), \quad t > 0 \tag{8}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{9}$$

در اختیار باشد. در این‌جا شرایط مرزی ناهمگن و توابعی بر حسب t هستند. با استفاده از تغییر متغیر

$$u(x,t) = W(x,t) + v(x,t) \tag{10}$$

که در آن

$$v(x,t) = C_1 x + C_2 \tag{11}$$

را طوری تعیین می‌کنیم که معادله‌ی حاصل بر حسب W با شرایط مرزی همگن باشد. با استفاده از شرایط مرزی (۷) و (۸) داریم

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= u(0,t) = W(0,t) + v(0,t) = W(0,t) + C_2 \\ \psi(t) &= u(L,t) = W(L,t) + v(L,t) = W(L,t) + C_1 L + C_2. \end{aligned}$$

چون می‌خواهیم $W(0,t) = W(L,t) = 0$، باید داشته باشیم

$$C_2 = \varphi(t), \quad C_1 = \frac{1}{L}[\psi(t) - \varphi(t)].$$

بنابراین با انتخاب

$$v(x,t) = \varphi(t) + \frac{x}{L}[\psi(t) - \varphi(t)]$$

معادله‌ی حاصل بر حسب W با شرایط همگن است. اکنون مسأله را بر حسب W می‌یابیم. با مشتق‌گیری از (۱۰) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} u_t &= W_t + \varphi'(t) + \frac{x}{L}[\psi'(t) - \varphi'(t)] \\ u_{xx} &= W_{xx} \end{aligned}$$

و در نتیجه مسأله برای W به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} &W_t = a^2 W_{xx} + g(x,t) - \varphi'(t) - \frac{x}{L}[\psi'(t) - \varphi'(t)] \\ &W(0,t) = W(L,t) = 0 \\ &W(x,0) = f(x) - \varphi(0) - \frac{x}{L}[\psi(0) - \varphi(0)]. \end{aligned}$$

در نتیجه با تغییر متغیر مناسب همواره می‌توان شرایط مرزی را همگن کرد. پس در مثال‌های بعد شرایط مرزی را همگن در نظر می‌گیریم. فرض کنید مسأله‌ی گرمای

$$u_t = a^2 u_{xx} + g(x,t), \qquad 0 < x < L \tag{12}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \tag{13}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{14}$$

در اختیار باشد. در این مسأله شرایط مرزی همگن هستند ولی معادله دیفرانسیل ناهمگن است. برای حل مسأله‌ی (۱۲)-(۱۳) ابتدا مسأله‌ی همگن متناظر آن، یعنی

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad 0 < x < L$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

$$u(x,0) = f(x).$$

را در نظر می‌گیریم. توابع ویژه‌ی مسأله‌ی بالا عبارتند از

$$\sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{15}$$

سعی می‌کنیم جواب مسأله‌ی ناهمگن را بر حسب توابع ویژه‌ی مسأله همگن بیابیم. در واقع سری فوریه تابع جواب $u(x,t)$ را بر حسب توابع ویژه‌ی مسأله همگن به دست می‌آوریم. برای این کار فرض می‌کنیم سری فوریه‌ی $u(x,t)$ به صورت زیر باشد

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\frac{n\pi x}{L},$$

که در آن $u_n(t)$ ضریب سری فوریه تابع $u(x,t)$ است و باید با استفاده از شرایط مسأله آن‌ها را بیابیم. با استفاده از شرط اولیه‌ی (۱۴) داریم

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

در نتیجه $u_n(0)$ ضریب سری فوریه‌ی سینوسی $f(x)$ است، یعنی

$$u_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx. \tag{16}$$

اکنون برای یافتن $u_n(t)$ سری فوریه‌ی تابع $g(x,t)$ را بر حسب توابع ویژه‌ی مسأله، یعنی توابع (۱۵) می‌یابیم

$$g(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L} \quad \text{و} \quad g_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L g(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

با جای‌گذاری در معادله‌ی (۱۲) به دست می‌آوریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)\sin\frac{n\pi x}{L} = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\left[-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\frac{n\pi x}{L}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

با دسته بندی جملات خواهیم داشت

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[u_n'(t) + \left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 u_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

با متحد قرار دادن دو طرف تساوی بالا خواهیم داشت

$$u_n'(t) + \left(\frac{an\pi}{L}\right)^{۲} u_n(t) = g_n(t).$$

با حل معادله‌ی خطی مرتبه‌ی اول بالا ضرایب مجهول $u_n(t)$ به صورت زیر به دست می‌آیند

$$u_n(t) = e^{-(\frac{an\pi}{L})^{۲} t} u_n(۰) + \int_{۰}^{t} e^{-(an\pi/L)^{۲}(t-z)} g_n(z)\, dz.$$

مثال ۴۴. *مسأله‌ی غیرهمگن زیر را حل کنید*

$$\begin{cases} u_t = a^{۲} u_{xx} + t(x^{۲} - \pi x), & ۰ < x < \pi, \quad t > ۰ \\ u(۰, t) = ۰, \\ u(\pi, t) = ۰, \\ u(x, ۰) = x \end{cases}$$

حل توابع ویژه‌ی مسأله‌ی همگن متناظر، یعنی

$$\begin{cases} u_t = a^{۲} u_{xx}, & ۰ < x < \pi \\ u(۰, t) = u(\pi, t) = ۰ \\ u(x, ۰) = x \end{cases}$$

عبارتند از

$$\sin nx, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

سری فوریه تابع جواب $u(x,t)$ را بر حسب توابع ویژه‌ی مسأله همگن به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم سری فوریه‌ی $u(x,t)$ به صورت زیر باشد

$$u(x, t) = \sum_{n=۱}^{\infty} u_n(t) \sin nx,$$

که در آن $u_n(t)$ ضریب سری فوریه تابع $u(x,t)$ است. با استفاده از شرط اولیه‌ی $u(x,۰) = x$ داریم

$$x = u(x, ۰) = \sum_{n=۱}^{\infty} u_n(۰) \sin nx.$$

در نتیجه $u_n(۰)$ ضریب سری فوریه‌ی سینوسی x است، یعنی

$$u_n(۰) = \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{\pi} x \sin nx\, dx = \frac{۲}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^{۲}} \right]_{۰}^{\pi} = \frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n}.$$

اکنون برای یافتن $u_n(t)$ سری فوریه‌ی تابع $g(x,t) = t(x^{۲} - \pi x)$ را بر حسب توابع ویژه‌ی مسأله می‌یابیم. بنابراین

$$t(x^{۲} - \pi x) = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n(t) \sin nx,$$

که در آن

$$\begin{aligned} b_n(t) &= \frac{۲}{\pi} t \int_{۰}^{\pi} (x^{۲} - \pi x) \sin nx\, dx \\ &= \frac{۲}{\pi} t \left[-(x^{۲} - \pi x) \frac{\cos nx}{n} + (۲x - \pi) \frac{\sin nx}{n^{۲}} + ۲ \frac{\cos nx}{n^{۳}} \right]_{۰}^{\pi} \\ &= \frac{۴t((-۱)^n - ۱)}{\pi n^{۳}}. \end{aligned}$$

با جای‌گذاری نتایج بالا در معادله‌ی $u_t = a^2 u_{xx} + t(x^2 - \pi x)$ به دست می‌آوریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t) \sin nx = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)(-n^2) \sin nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin nx.$$

با دسته بندی جملات خواهیم داشت

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n'(t) + a^2 n^2 u_n(t)) \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin nx.$$

با متحد قرار دادن دو طرف تساوی بالا به دست می‌آوریم

$$u_n'(t) + a^2 n^2 u_n(t) = b_n(t).$$

با حل معادله‌ی خطی مرتبه‌ی اول بالا ضرایب مجهول $u_n(t)$ به صورت زیر به دست می‌آیند

$$u_n(t) = e^{-a^2 n^2 t} u_n(0) + \int_0^t e^{-(a^2 n^2)(t-z)} b_n(z)\, dz.$$

چون $b_n(t) = \dfrac{4t((-1)^n - 1)}{\pi n^3}$ و $u_n(0) = \dfrac{2(-1)^{n+1}}{n}$ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
u_n(t) &= e^{-a^2 n^2 t} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4((-1)^n - 1)}{\pi n^3} \int_0^t z e^{-(a^2 n^2)(t-z)}\, dz \\
&= e^{-a^2 n^2 t} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4((-1)^n - 1)}{\pi n^3} \left[-z \frac{e^{-(a^2 n^2)(t-z)}}{a^2 n^2} + \frac{e^{-(a^2 n^2)(t-z)}}{a^4 n^4} \right]_0^t \\
&= e^{-a^2 n^2 t} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4((-1)^n - 1)}{\pi n^3} \left[\frac{1 - a^2 n^2 t}{a^4 n^4} - \frac{e^{-a^2 n^2 t}}{a^4 n^4} \right]
\end{aligned}$$

مثال ۴۵. *مسأله‌ی غیرهمگن زیر را حل کنید*

$$\begin{aligned}
& u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t), \qquad 0 < x < L, \quad t > 0 \\
& u(0,t) = u(L,t) = 0 \\
& u(x,0) = f(x) \\
& u_t(x,0) = g(x).
\end{aligned}$$

حل ابتدا مسأله‌ی همگن نظیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned}
& u_{tt} = c^2 u_{xx} \\
& u(0,t) = u(L,t) = 0
\end{aligned}$$

به سادگی می‌توان دید که توابع ویژه‌ی مسأله عبارتند از

$$\left\{ \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

برای یافتن جواب مسأله‌ی غیرهمگن بسط فوریه‌ی آن‌را برحسب توابع ویژه می‌نویسیم:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

هدف ما پیدا کردن $u_n(t)$ است. اکنون بسط فوریه‌ی سینوسی $h(x,t)$ را می‌نویسیم

$$h(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}h_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L},\qquad h_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L h(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

با مشتق‌گیری از سری فوریه‌ی $u(x,t)$ خواهیم داشت

$$u_{tt}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n''(t)\sin\frac{n\pi x}{L}u_{xx}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\sin\frac{n\pi x}{L}\right).$$

اکنون با جای‌گذاری داده‌های بالا در معادله خواهیم داشت

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n''(t)\sin\frac{n\pi x}{L}=c^2\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\left(\frac{-n^2\pi^2}{L^2}\sin\frac{n\pi x}{L}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}h_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

در نتیجه

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[u_n''(t)+\frac{c^2n^2\pi^2}{L^2}u_n(t)-h_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{L}=0$$

و با متحد قرار دادن دو طرف تساوی داریم

$$u_n''(t)+\frac{c^2n^2\pi^2}{L^2}u_n(t)=h_n(t).$$

با حل معادله‌ی خطی مرتبه‌ی دوم بالا به دست می‌آوریم

$$u_n(t)=a_n\cos\lambda_n t+b_n\sin\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t h_n(\eta)\sin\lambda_n(t-\eta)\,d\eta,$$

که در آن $\lambda_n=\dfrac{cn\pi}{L}$. بنابراین

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\mu_n t+b_n\sin\lambda_n t+\frac{1}{\mu_n}\int_0^t h_n(\eta)\sin\mu_n(t-\eta)\,d\eta\right]\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

با استفاده از شرط اولیه داریم

$$f(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{L}$$

و در نتیجه a_n ضریب فوریه‌ی سینوسی $f(x)$ است:

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

از طرف دیگر

$$g(x)=u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\lambda_n\sin\frac{n\pi x}{L}$$

و بنابراین با استفاده از بسط فوریه‌ی سینوسی $g(x)$، b_n به دست می‌آید

$$b_n=\frac{2}{\lambda_nL}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.\qquad\blacksquare$$

مثال ۴۶. *مسأله‌ی موج ناهمگن زیر را به مسأله‌ای با شرایط مرزی همگن تبدیل کنید*

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t), \quad 0 < x < L$$
$$u(0,t) = \varphi(t)$$
$$u(L,t) = \psi(t)$$
$$u(x,0) = f(x)$$
$$u_t(x,0) = g(x).$$

حل تغییر متغیر $u(x,t) = v(x,t) + W(x,t)$ را اعمال می‌کنیم و با تعیین مناسب W، مسأله‌ای با شرایط مرزی همگن بر حسب v به دست می‌آوریم. با جای‌گذاری در معادله و شرایط مرزی و اولیه خواهیم داشت

$$\begin{aligned} v_{tt} + W_{tt} &= c^2(v_{xx} + W_{xx}) + h(x,t) \\ v(x,0) &= f(x) - W(x,0) \\ v(x,0) &= g(x) - W_t(x,0) \\ v(0,t) &= \varphi(t) - W(0,t) \\ v(L,t) &= \psi(t) - W(L,t). \end{aligned}$$

برای این‌که شرایط مرزی همگن شوند باید قرار دهیم

$$W(0,t) = \varphi(t)$$
$$W(L,t) = \psi(t).$$

بنابراین اگر

$$W(x,t) = \varphi(t) + \frac{x}{L}[\psi(t) - \varphi(t)],$$

آن‌گاه مسأله با شرایط مرزی همگن زیر را داریم

$$\begin{aligned} v_{tt} &= c^2 v_{xx} + h(x,t) - W_{tt} \\ v(x,0) &= f(x) - W(x,0) \\ v_t(x,0) &= g(x) - W_t(x,0) \\ v(0,t) &= 0 \\ v(L,t) &= 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

فرض کنید که مسأله به صورت زیر باشد

$$\begin{array}{lll} \nabla^2 u = 0, & 0 < x < a, & 0 < y < b \\ u(x,a) = f_1(x), & 0 \le x \le a & \\ u(x,b) = f_2(x), & 0 \le x \le a & \\ u(0,y) = g_1(y), & 0 \le y \le b & \\ u(a,y) = g_1(y), & 0 \le y \le b. & \end{array}$$

در این صورت برای جدا کردن متغیرها، مسأله را به دو مسأله تفکیک می‌کنیم. برای این کار $u(x,y)=v(x,y)+w(x,y)$ که در آن

$$\begin{array}{ll}\nabla^2 v=0 & \nabla^2 w=0\\ v(x,0)=f_1(x) & w(x,0)=0\\ v(x,b)=f_2(x) & w(x,b)=0\\ v(0,y)=0 & w(0,y)=g_1(y)\\ v(a,y)=0 & w(a,y)=g_2(y).\end{array}$$

با حل دو مسأله‌ی بالا جواب مسأله‌ی اصلی به دست می‌آید.

مثال ۴۷. *معادله لاپلاس با شرایط مرزی زیر را حل کنید.*

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=\sin x+\cos y\\ u(0,y)=-1\\ u(\pi,y)=1\\ u(x,0)=\cos x\\ u_y(x,\pi)=\sin x\end{cases}$$

حل مسأله را به دو مسأله تفکیک می‌کنیم

$$(1)\ \begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=\sin x\\ u(0,y)=u(\pi,y)=0\\ u(x,0)=\cos x\\ u_y(x,\pi)=0\end{cases}\qquad (2)\ \begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=\cos y\\ u(0,y)=-1\\ u(\pi,y)=1\\ u(x,0)=u_y(x,\pi)=0\end{cases}$$

برای حل مسأله‌ی (۱) ابتدا با تغییر متغیر $u(x,y)=W(x,y)+\varphi(x)$ و تعیین مناسب $\varphi(x)$ آن را به معادله‌ای همگن بر حسب W تبدیل می‌کنیم. با قرار دادن در معادله و شرایط مرزی داریم

$$\begin{cases}W_{xx}+\varphi''(x)+W_{yy}=\sin x\\ W(0,y)+\varphi(0)=0\\ W(a,y)+\varphi(a)=0.\end{cases}$$

در نتیجه تابع φ باید در مسأله‌ی

$$\begin{cases}\varphi''(x)=\sin x\\ \varphi(0)=0\\ \varphi(\pi)=0\end{cases}$$

صدق کند. بنابراین $\varphi(x) = \sin x$. مسأله‌ی حاصل بر حسب W به صورت همگن زیر است

$$(۳) \quad \begin{cases} W_{xx} + W_{yy} = ۰ \\ W(۰, y) = W(\pi, y) = ۰ \\ W(x, ۰) = \cos x - \sin x \\ W_y(x, \pi) = \sin x. \end{cases}$$

برای حل مسأله‌ی (۲) ابتدا با تغییر متغیر $u(x,y) = W(x,y) + \varphi(y)$ و تعیین مناسب $\varphi(y)$ آن را به معادله‌ای همگن بر حسب W تبدیل می‌کنیم. با قرار دادن در معادله و شرایط مرزی داریم

$$\begin{cases} W_{xx} + W_{yy} + \varphi''(y) = \cos y \; W(x, ۰) + \varphi(۰) = ۰ \\ W_y(x, \pi) + \varphi'(\pi) = ۰. \end{cases}$$

در نتبجه تابع φ باید در مسأله‌ی

$$\begin{cases} \varphi''(y) = \cos y \\ \varphi(۰) = ۰ \\ \varphi'(\pi) = ۰ \end{cases}$$

صدق کند. بنابراین $\varphi(y) = ۱ - \cos y$. مسأله‌ی حاصل بر حسب W به صورت همگن زیر است

$$(۴) \quad \begin{cases} W_{xx} + W_{yy} = ۰ \\ W(۰, y) = -۲ + \cos y \\ W(\pi, y) = \cos y \\ W(x, ۰) = ۰ \\ W_y(x, \pi) = ۰. \end{cases}$$

مسأله‌های (۳) و (۴) را به راحتی می‌توان حل کرد.

در ادامه این بخش روش دالامبر برای حل معادله‌ی موج را بررسی می‌کنیم. این روش مبتنی بر تغییر یک متغیر مناسب است. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که سیم مرتعش نامتناهی باشد:

$$u_{tt} = a^۲ u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > ۰$$
$$u(x, ۰) = f(x)$$
$$u_t(x, ۰) = g(x).$$

تغییر متغیر

$$s = x + at, \qquad r = x - at$$

را اعمال می‌کنیم. با تغییر متغیرهای بالا u تابعی r و s خواهد بود. می‌خواهیم به جای مشتقات u نسبت به t و x از مشتقات u نسبت به r و s در معادله دیفرانسیل استفاده کنیم. با استفاده از قاعده‌ی زنجیری مشتقات u را نسبت به x می‌یابیم. با توجه

به این‌که $r_x = ۱$ و $s_x = ۱$ داریم

$$\begin{aligned} u_x &= u_r \cdot r_x + u_s \cdot s_x = u_r + u_s \\ u_{xx} &= (u_r)_x + (u_s)_x = u_{rr} \cdot r_x + u_{rs}s_x + u_{sr}r_x + u_{ss}s_x \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{rr} + u_{rs} + u_{sr} + u_{ss} \\ &= u_{rr} + ۲u_{rs} + u_{ss}. \end{aligned}$$

به طریق مشابه، با توجه به این‌که $r_t = -a$ و $s_t = a$، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} u_t &= u_r r_t + u_s s_t = -au_r + au_s \\ u_{tt} &= -a(u_r)_t + a(u_s)_t = -a[u_{rr}.r_t + u_{rs}s_t] + a[u_{sr}r_t + u_{ss}s_t] \\ &= -a[-au_{rr} + au_{rs}] + a[-au_{sr} + au_{ss}] \\ &= a^۲u_{rr} - a^۲u_{rs} - a^۲u_{sr} + a^۲u_{ss} \\ &= a^۲u_{rr} - ۲a^۲u_{rs} + a^۲u_{ss}. \end{aligned}$$

اکنون چون $u_{tt} = a^۲u_{xx}$ داریم

$$u_{rs} = ۰$$

و در نتیجه

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial r \sigma s} = ۰.$$

با انتگرال‌گیری نسبت به r به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \alpha(s)$$

که در آن $\alpha(s)$ تابعی دلخواه است. اکنون با انتگرال‌گیری نسبت به s خواهیم داشت

$$u = \int \alpha(s)\, ds + \psi(r).$$

بنابراین

$$u = \phi(s) + \psi(r)$$

و در نتیجه

$$u(x,t) = \varphi(x+at) + \psi(x-at).$$

چون $u(x,۰) = f(x)$ داریم

$$u(x,۰) = \varphi(x) + \psi(x) = f(x) \qquad (۱۷)$$

علاوه بر آن چون $u_t(x,0)=g(x)$ و

$$u_t(x,y)=a\varphi'(x+at)-a\psi'(x-at)$$

خواهیم داشت $u_t(x,0)=a\varphi'(x)-a\psi'(x)=g(x)$، یعنی

$$\varphi'(x)-\psi'(x)=\frac{1}{a}g(x)$$

و در نتیجه با استفاده از انتگرال‌گیری داریم

$$\varphi(x)-\psi(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}g(s)\,ds+k, \qquad (18)$$

که در آن k یک عدد ثابت و $x_0\in(-\infty,+\infty)$ عدد دلخواهی است. با استفاده از معادله‌های (۱۷) و (۱۸) دستگاه

$$\begin{cases}\varphi(x)+\psi(x)=f(x)\\ \varphi(x)-\psi(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}g(s)\,ds+k\end{cases}$$

را داریم. با حل دستگاه اخیر به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}g(s)\,ds+\frac{k}{2}\\ \psi(x)&=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}g(s)\,ds-\frac{k}{2}.\end{aligned}$$

از این‌رو جواب مسأله‌ی تار مرتعش نامتناهی عبارت است از

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\varphi(s)+\psi(r)\\ &=\varphi(x+at)+\psi(x-at)\\ &=\frac{1}{2}f(x+at)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at}g(s)\,ds+\frac{1}{2}f(x-at)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at}g(s)\,ds\\ &=\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(s)\,ds.\end{aligned}$$

مثال ۴۸. *با استفاده از روش دالامبر مسأله‌ی تار مرتعش نامتناهی زیر را حل کنید*

$$\begin{aligned}&u_{tt}=a^2u_{xx}, \qquad -\infty<x<+\infty\\ &u(x,0)=\sin x\\ &u_t(x,0)=\cos x\end{aligned}$$

حل با توجه به فرمول به دست آمده در روش دالامبر داریم

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2}[\sin(x+at)+\sin(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\cos z\,dz\\ &=\sin x\cos at+\frac{1}{2a}[\sin(x+at)-\sin(x-at)]\\ &=\sin x\cos at+\frac{1}{a}\cos x\sin at. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

ریاضی مهندسی

(بخش دوم، توابع مختلط)

(ترم تابستانی ۱۳۹۳)

دکتر بیژن طائری

دانشکده‌ی علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی اصفهان

فصل ۶، دستگاه اعداد مختلط

جلسه نهم ۵ مرداد ۱۳۹۳

یک عدد مختلط عبارت است از زوج مرتب $z = (x, y)$، که در x و y اعداد حقیقی هستند. برای سهولت در محاسبه‌ها یک عدد مختلط را با نماد $z = x + iy$ نشان می‌دهیم. x را قسمت حقیقی z گوییم و با $\operatorname{Re} z = x$ نشان می‌دهیم؛ و y را قسمت موهومی z نامیده و با $\operatorname{Im} z = y$ نشان می‌دهیم. دو عدد مختلط $z = x + iy$ و $w = a + ib$ مساوی هستند اگر و تنها اگر $x = a$ و $y = b$. جمع و ضرب اعداد مختلط را به صورت نمادین انجام داده و در محاسبه‌ها به جای $i^۲$ مقدار -۱ قرار می‌دهیم. سپس جملات را دسته‌بندی کرده و حاصل را با مشخص کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی به صورت یک عدد مختلط می‌نویسیم. در واقع اگر $z = x + iy$ و $w = a + ib$ دو عدد مختلط باشند مجموع آن‌ها به صورت

$$z + w = (x + iy) + (a + ib) = (x + a) + i(y + b).$$

و حاصل‌ضرب آن‌ها به صورت

$$\begin{aligned} zw &= (x + iy)(a + ib) \\ &= xa + ixb + iya + i^۲ yb \\ &= xa + ixb + iya - yb \\ &= (xa - yb) + i(xb + ya). \end{aligned}$$

تعریف می‌شود. مجموعه‌ی اعداد مختلط را با $\mathbb{C}$ نشان می‌دهیم. قدر مطلق عدد مختلط $z = x + iy$ را که با $|z|$ نشان می‌دهیم همان طول بردار (x, y) است، یعنی $|z| = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ مزدوج مختلط عدد $z = x + iy$ عبارت است از $\overline{z} = x - iy$. داریم

$$z\overline{z} = x^۲ + y^۲ = |z|^۲ \quad \text{و} \quad |z| = |\overline{z}|.$$

وارون عدد مختلط ناصفر $z = x + iy$ عبارت است از

$$\begin{aligned} \frac{۱}{z} &= \frac{۱}{z}\frac{\overline{z}}{\overline{z}} \\ &= \frac{\overline{z}}{|z|^۲} \\ &= \frac{x}{x^۲ + y^۲} + i\frac{-y}{x^۲ + y^۲}. \end{aligned}$$

به سادگی می‌توان دید که

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \quad \text{و} \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

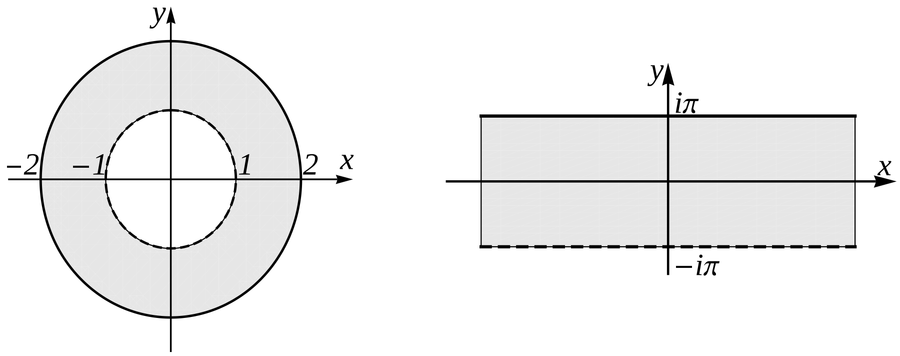
مثال ۱. *عدد مختلط* $\frac{۱ + ۲i}{۱ - i}$ *را به صورت* $a + ib$ *بنویسید.*

حل مزدوج مختلط $۱ - i$ عبارت است از $\overline{۱ - i} = ۱ + i$، پس

$$\frac{۱ + ۲i}{۱ - i} = \frac{۱ + ۲i}{۱ - i} \times \frac{۱ + i}{۱ + i} = \frac{۱ + i + ۲i - ۲}{|۱ - i|} = \frac{-۱ + ۳i}{۲} = \frac{-۱}{۲} + i\frac{۳}{۲}$$

معادله‌ی یک دایره به مرکز (a,b) و شعاع R عبارت است از $(x-a)^۲+(y-b)^۲=R^۲$. قرار می‌دهیم $z_۰=a+ib$ و $z=x+iy$. در نتیجه $z-z_۰=(x-a)+i(y-b)$ و معادله‌ی دایره را می‌توان به صورت $|z-z_۰|^۲=R^۲$ یا $|z-z_۰|=R$ نوشت.

مثال ۲. *(آ) مجموعه‌ی $\{z\in\mathbb{C}\mid ۱<|z|\le ۲\}$ یک طوقه به صورت نشان داده شده در شکل ۱ (آ) است.*
(ب) مجموعه‌ی $\{z\in\mathbb{C}\mid -\pi<\operatorname{Im} z\le\pi\}$ یک نوار افقی به صورت نشان داده شده در شکل ۱ (ب) است. ■



(آ) (ب)

شکل ۱: (آ) طوقه‌ی $۱<|z|\le ۲$ (ب) نوار $-\pi<\operatorname{Im} z\le\pi$

مثال ۳. *مجموعه‌ی نقاط $D=\{z\in\mathbb{C}\mid ۰<\operatorname{Re}(iz)\le ۱\}$ را توصیف کنید.*

حل فرض کنید $z=x+iy$. در این صورت $iz=i(x+iy)=-y+ix$ و در نتیجه $\operatorname{Re}(iz)=-y$. پس

$$\begin{aligned} z\in D &\iff ۰<\operatorname{Re}(iz)\le ۱\\ &\iff ۰<-y\le ۱\\ &\iff -۱<y\le ۰ \end{aligned}$$

بنابراین $D=\{z\in\mathbb{C}\mid z=x+iy,\ -\infty<x<+\infty,\ -۱<y\le ۰\}$ یک نوار افقی است.

مثال ۴. *مجموعه‌ی نقاط $D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=\operatorname{Re}(z)+۱\}$ توصیف کنید.*

حل فرض کنید $z=x+iy$. در این صورت

$$\begin{aligned} z\in D &\iff |z|=\operatorname{Re}(z)+۱\\ &\iff \sqrt{x^۲+y^۲}=x+۱\\ &\iff x^۲+y^۲=x^۲+۲x+۱\\ &\iff y^۲=۲x+۱ \end{aligned}$$

بنابراین D نمودار یک سهمی است.

مثال ۵. *مجموعه‌ی نقاط z را توصیف کنید که* $\operatorname{Im}\frac{1}{i-z} < 2$.

حل با فرض $z = x + iy$ داریم

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i-z} &= \frac{1}{i-z} \times \frac{\overline{\overline{i-z}}}{\overline{i-z}} = \frac{1}{i-z} \times \frac{-i-\overline{z}}{\overline{i-z}} = \frac{-i-\overline{z}}{|i-z|^2} \\
&= \frac{-i-(x-iy)}{|-x+i(1-y)|^2} \\
&= \frac{-x+i(-1+y)}{x^2+(1-y)^2}
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\frac{1}{i-z} < 2 &\iff \frac{-1+y}{x^2+(1-y)^2} < 2 \\
&\iff -1+y < 2(x^2+(1-y)^2) \\
&\iff -1+y < 2x^2+2+2y^2-4y \\
&\iff 0 < 2x^2+3+2y^2-5y \\
&\iff 0 < x^2+\frac{3}{2}+y^2-\frac{5}{2}y \\
&\iff 0 < x^2+\frac{3}{2}+(y-\frac{5}{4})^2-\frac{25}{16} \\
&\iff 0 < x^2+(y-\frac{5}{4})^2-\frac{1}{16} \\
&\iff \frac{1}{16} < x^2+(y-\frac{5}{4})^2 \\
&\iff \left|z-i\frac{5}{4}\right|^2 > \frac{1}{16} \\
&\iff \left|z-i\frac{5}{4}\right| > \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

و در نتیجه مجموعه نقاط مورد نظر خارج یک دایره به مرکز $z_0 = \frac{5}{4}i$ و شعاع $\frac{1}{16}$ است.

مثال ۶. *مجموعه‌ی نقاط z را توصیف کنید که* $\operatorname{Re}\frac{1+z}{2-z} > 1$.

حل با فرض $z = x + iy$ داریم

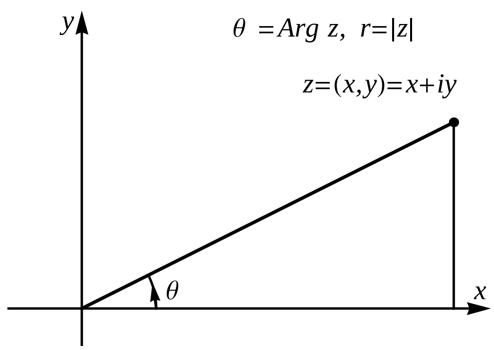
$$\begin{aligned}
\frac{1+z}{2-z} &= \frac{1+z}{2-z} \times \frac{\overline{2-z}}{\overline{2-z}} = \frac{(1+z)(2-\overline{z})}{|2-z|^2} = \frac{1-\overline{z}+2z-z\overline{z}}{|z-2|^2} \\
&= \frac{1-(x-iy)+2(x+iy)-|z|^2}{|z-2|^2} \\
&= \frac{1-x^2-y^2+x+3iy}{(x-2)^2+y^2}
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\frac{۱+z}{۲-z} > ۱ &\iff \frac{۱-x^۲-y^۲+x}{(x-۲)^۲+y^۲} > ۱\\
&\iff ۱-x^۲-y^۲+x > (x-۲)^۲+y^۲\\
&\iff ۲x^۲+۲y^۲-۵x+۳ < ۰\\
&\iff x^۲+y^۲-\frac{۵}{۲}x+\frac{۳}{۲} < ۰\\
&\iff (x-\frac{۵}{۴})^۲+y^۲+\frac{۳}{۲}-\frac{۲۵}{۱۶} < ۰\\
&\iff (x-\frac{۵}{۴})^۲+y^۲ < \frac{۱}{۱۶}\\
&\iff |z-\frac{۵}{۴}|^۲ < \frac{۱}{۱۶}\\
&\iff |z-\frac{۵}{۴}| < \frac{۱}{۴}
\end{aligned}$$

و در نتیجه مجموعه نقاط مورد نظر داخل یک دایره به مرکز $z_۰=\frac{۵}{۴}$ و شعاع $\frac{۱}{۴}$ است.

فرض کنید $z=x+iy$ یک عدد مختلط ناصفر باشد. یادآوری می‌کنیم که متناظر هر نقطه‌ی (x,y) در صفحه‌ی دکارتی، مختصات قطبی (r,θ) را داریم که در آن $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$. عدد مثبت r طول بردار (x,y) است و θ زاویه‌ای است که این بردار با جهت مثبت محور xها می‌سازد (شکل ۲ را ببینید). روابط زیر را داریم



شکل ۲: نمایش قطبی اعداد مختلط

$$r=\sqrt{x^۲+y^۲},\quad \tan\theta=\frac{y}{x}.$$

θ را یک آوند z گوییم و با $\arg z$ نشان می‌دهیم. اگر $z=۰$، $\arg z$ تعریف نشده است. توجه کنید که $\arg z$ تابع نیست، زیرا به ازای هر z نامتناهی مقدار اختیار می‌کند (گوییم $\arg z$ تابع چندمقداری است). به عنوان مثال داریم

$$\arg(-۱)=\pi+۲n\pi,\quad \arg i=\frac{\pi}{۲}+۲n\pi,\qquad n\in\mathbb{Z}.$$

در واقع اگر θ آوندی از z باشد، آن‌گاه $\arg z=\theta+۲n\pi$. در نتیجه تفاضل دو آوند دلخواه از z مضربی از ۲π است. توجه کنید که تابع چندمقداری $\arg z$ تناوبی با دوره‌ی تناوب ۲π است، یعنی $\arg(z+۲\pi)=\arg z$. مقدار یکتای $\arg z$ که $-\pi<\arg z\le\pi$ را آوند اصلی z گوییم و با $\operatorname{Arg} z$ نشان می‌دهیم. $\operatorname{Arg} z$ یک تابع (تک‌مقداری) است. به عنوان مثال

داریم

$$\operatorname{Arg}(-1)=\pi, \quad \operatorname{Arg} i=\frac{\pi}{2}.$$

r همان قدرمطلق z، یعنی $|z|$، است. داریم

$$z=x+iy=r\cos\theta+ir\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

کمیت بسیار مهم $\cos\theta+i\sin\theta$ را به صورت $e^{i\theta}$ نشان می‌دهیم:

تعریف ۷. (*رابطه‌ی اویلر*) *اگر θ یک عدد حقیقی دلخواه باشد تعریف می‌کنیم*

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta.$$

بنابراین هر عدد مختلط ناصفر z را می‌توان به صورت $z=re^{i\theta}$ نوشت، که در آن $r=|z|$ و $\theta=\arg z$، یعنی

$$z=|z|e^{i\arg z}.$$

علاوه بر آن $z=\rho e^{i\phi}$ اگر و تنها اگر $\rho=r$ و به ازای یک عدد صحیح n، $\phi=\theta+2n\pi$، یعنی ϕ هم یک آوند از z است. نمایش $z=re^{i\theta}$ را نمایش قطبی z می‌نامیم. مثلا داریم

$$-1=e^{i\pi}, \quad i=e^{i\pi/2}, \quad -i=e^{3i\pi/2}, \quad 1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

توجه کنید که به ازای عدد حقیقی θ داریم $|e^{i\theta}|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$.

فرض کنید $z,w\in\mathbb{C}$ و $z=re^{i\theta}$ و $w=\rho e^{i\phi}$. چون $zw=re^{i\theta}\rho e^{i\phi}=r\rho e^{i(\theta+\phi)}$ داریم $|zw|=r\rho=|z||w|$ و

$$\arg(zw)=\arg z+\arg w. \tag{1}$$

در نتیجه $zw=r\rho e^{i(\theta+\phi)}$. توجه کنید رابطه‌ی (۱) بیان می‌دارد که اگر θ یک آوند از z و ϕ یک آوند از w باشد، آن‌گاه $\theta+\phi$ آوندی از zw است و بر عکس هر آوند zw، برابر مجموع یک آوند از z و یک آوند از w است. رابطه‌ی (۱) به پیمانه‌ی مضربی از 2π معتبر است، به طور دقیق‌تر می‌توان نوشت

$$\arg(zw)=\arg z+\arg w+2n\pi, \quad n\in\mathbb{Z}$$

به استقرا می‌توان نشان داد $|z_1z_2\cdots z_k|=|z_1||z_2|\cdots|z_k|$ و

$$\arg(z_1z_2\cdots z_k)=\arg(z_1)+\arg(z_2)+\cdots+\arg(z_k).$$

به ویژه داریم $|z^n|=|z|^n$ و $\arg(z^n)=n\arg z$.

به همین صورت اگر $w\neq 0$، آن‌گاه $\frac{z}{w}=\frac{r}{\rho}e^{i(\theta-\phi)}$ و داریم

$$\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{r}{\rho}=\frac{|z|}{|w|} \quad \text{و} \quad \arg(z/w)=\theta-\phi=\arg z-\arg w.$$

قضیه ۸. (*رابطه‌ی دموآر*) *اگر n عدد صحیح مثبت باشد، آن‌گاه* $(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$.

اثبات. فرض کنید $z=e^{i\theta}$. در این صورت $|z|=1$. بنابراین طبق قضیه‌ی قبل داریم

$$|z^n|=|z|^n=1 \quad \text{و} \quad \arg(z^n)=n\arg(z)=n\theta$$

در نتیجه

$$(e^{i\theta})^n = z^n = |z^n|e^{i\arg(z^n)} = |z|^n e^{in\arg z} = e^{in\theta}. \quad \blacksquare$$

با استفاده از رابطه‌ی دموآر می‌توان برخی از معادله‌ها را در $\mathbb{C}$ حل کرد. یکی از مهم‌ترین این معادله‌ها در مثال بعد بررسی شده است.

مثال ۹. *فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد. همه‌ی اعداد مختلط z را بیابید که در معادله‌ی $z^n = ۱$ صدق کنند.*

حل فرض کنید $z = re^{i\theta}$ در معادله صدق کند. داریم

$$e^{i۰} = ۱ = z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}.$$

بنابراین $r^n = ۱$ و $n\theta = ۰ + ۲k\pi$، که در آن k عدد صحیح دلخواهی است. از این‌رو جواب‌های متمایز معادله عبارتند از

$$z_k = e^{۲k\pi i/n}, \quad k = ۰, ۱, \ldots, n-۱.$$

توجه کنید که $z_n = z_۰$، $z_{n+۱} = z_۱$، .... بنابراین به ازای هر $k \geq n$، همان جواب‌های بالا به دست می‌آیند. اگر قرار دهیم $\omega = e^{۲\pi i/n}$، آن‌گاه w^k، $k = ۰, ۱, \ldots, n-۱$ جواب‌های معادله هستند. علاوه بر آن اگر ω^m جوابی از معادله باشد، آن‌گاه با تقسیم m بر n، اعداد صحیح q و k وجود دارند که $۰ \leq k \leq n-۱$ و $m = nq + k$. در نتیجه

$$\omega^m = \omega^{nq+k} = (\omega^n)^q \omega^k = \omega^k$$

و بنابراین هر جواب معادله به صورت w^k، $k = ۰, ۱, \ldots, n-۱$، است. $\blacksquare$

جواب‌های معادله‌ی $z^n = ۱$ را ریشه‌های nام واحد گوییم. $\omega = e^{۲\pi i/n}$ را یک ریشه‌ی اولیه‌ی nام واحد گوییم.

مثال ۱۰. *همه‌ی اعداد مختلط z را بیابید که در معادله‌ی $z^۳ = i$ صدق کنند.*

حل فرض کنید $z = re^{i\theta}$ در معادله صدق کند. چون $i = e^{i\pi/۲}$ داریم

$$e^{i\pi/۲} = i = z^۳ = (re^{i\theta})^۳ = r^۳ e^{۳i\theta}.$$

بنابراین $r^۳ = ۱$ و $۳\theta = \frac{\pi}{۲} + ۲k\pi$، که در آن k عدد صحیح دلخواهی است. از این‌رو $r = ۱$ و $\theta = \frac{\pi}{۶} + \frac{۲k\pi}{۳}$، $k = ۰, ۱, ۲$. از این رو جواب‌های معادله عبارتند از

$$z_۱ = e^{i\pi/۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۱}{۲}i, \quad z_۲ = e^{۵i\pi/۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۱}{۲}i, \quad z_۳ = e^{۹i\pi/۶} = -i.$$

می‌توان به صورت زیر نیز عمل کرد. چون $i = (-i)^۳$ جواب‌های معادله‌ی $z^۳ = i$ با جواب‌های معادله‌ی

$$\left(\frac{z}{-i}\right)^۳ = ۱$$

یکسان هستند. جواب‌های معادله‌ی اخیر عبارتند از $\frac{z}{-i} = ۱, \omega, \omega^۲$، که در آن $\omega = e^{۲\pi i/۳}$ یک ریشه‌ی اولیه‌ی ۳ام واحد است. در نتیجه $z = -i, -i\omega, -i\omega^۲$ ریشه‌های معادله‌ی $z^۳ = i$ هستند. $\blacksquare$

مثال ۱۱. *عبارت $\frac{(\sqrt{۳}-i)^۲(۱+i)^۵}{(\sqrt{۳}+i)^۴}$ را به صورت $a + ib$ نشان دهید.*

حل چون $۱ + i = \sqrt{۲}e^{i\pi/۴}$، $\sqrt{۳} - i = ۲e^{-i\pi/۶}$، و $\sqrt{۳} + i = ۲e^{i\pi/۶}$، داریم

$$\frac{(\sqrt{۳}-i)^۲(۱+i)^۵}{(\sqrt{۳}+i)^۴} = \frac{(۲e^{-i\pi/۶})^۲(\sqrt{۲}e^{i\pi/۴})^۵}{(۲e^{i\pi/۶})^۴} = \frac{۲^۴\sqrt{۲}e^{-i\pi/۳}e^{۵i\pi/۴}}{۲^۴e^{۲i\pi/۳}} = \sqrt{۲}e^{i\pi/۴} = ۱ + i$$

فصل ۷، توابع مختلط مقدماتی

جلسه دهم ۶ مرداد ۱۳۹۳

با توجه به رابطه‌ی اویلر تابع نمایی مختلط را به صورت

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

تعریف می‌کنیم. توجه کنید که اگر $x = 0$، آن‌گاه $e^{iy} = \cos y + i \sin y$، که همان رابطه‌ی اویلر است. چون برای $z = x + iy$، $e^z = e^x e^{iy}$ با توجه به نمایش قطبی اعداد مختلط داریم $|e^z| = e^x$ و $\arg(e^z) = y$. به ویژه چون $e^x \neq 0$ داریم $e^z \neq 0$. برخی از خواص تابع نمایی حقیقی برای تابع نمایی مختلط نیز برقرار هستند. اما برخی دیگر از خواص تابع نمایی حقیقی برای تابع نمایی مختلط برقرار نیستند. برخی خواص تابع نمایی عبارتند از

$$\begin{aligned}
e^{z+w} &= e^z e^w \\
e^{z-w} &= e^z e^{-w} \\
e^{-w} &= \frac{1}{e^w} \\
e^{z+2i\pi} &= e^z e^{2\pi i} = e^z
\end{aligned}$$

تابع e^z یک تابع تناوبی با دوره‌ی تناوب $2\pi i$ است. چون $e^z \neq 0$، نقطه‌ی 0 در برد e^z نیست. اما هر نقطه‌ی ناصفر در برد e^z است. در واقع اگر $w = re^{i\theta}$ نقطه‌ی ناصفری در صفحه‌ی مختلط باشد، آن‌گاه $z = x + iy$ را طوری می‌یابیم که $e^z = w$. داریم

$$re^{i\theta} = w = e^z = e^x e^{iy}.$$

بنابراین $r = e^x$ و $y - \theta = 2n\pi$. پس کافی است قرار دهیم $x = \ln r$ و $y = \theta$:

$$e^{\ln r + i\theta} = e^{\ln r} e^{i\theta} = re^{i\theta} = w.$$

پس ثابت شد

$$w = e^z \iff w = e^x e^{iy} \iff |w| = e^x, \ \arg(w) = y \iff z = x + iy = \ln|w| + i\arg(w)$$

بنابراین اگر $w = f(z)$، آن‌گاه

$$w = f(z) \iff z = f^{-1}(w) = \ln|w| + i\arg w$$

در نتیجه $z = f^{-1}(w)$ یک تابع نیست. برای اینکه f^{-1} تابع باشد باید $\arg w$ که همان قسمت موهومی z است را

$$A = \{z \mid -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$$

محدود کنیم. با این‌کار تابع $f(z) = e^z$ مجموعه‌ی A را به طور یک به یک به مجموعه‌ی $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ تصویر می‌کند تابع وارون $f(z) = e^z$ دارای ضابطه‌ی $f^{-1}(z) = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$ است. این تابع را شاخه‌ی اصلی تابع لگاریتمی مختلط نامیم. توجه کنید می‌توان دامنه‌ی تعریف e^z را به هر نوار

$$\{z \mid y_0 < \operatorname{Im} z \leq y_0 + 2\pi\}$$

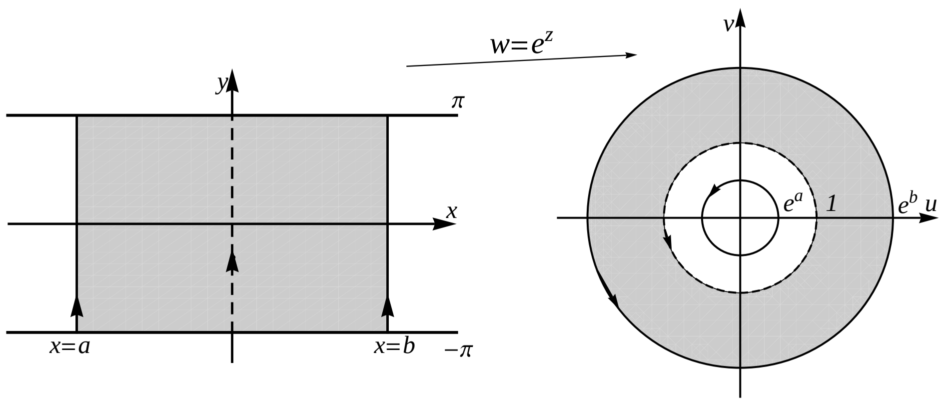
محدود کرد و تابع یک به یک، و در نتیجه شاخه‌های دیگری از لگاریتم طبیعی، یافت.

مثال ۱۲. *تصویر خطوط زیر را تحت تابع $f(z) = e^z$ بیابید.*

(آ) *خط $x = a$، a یک عدد حقیقی است.*

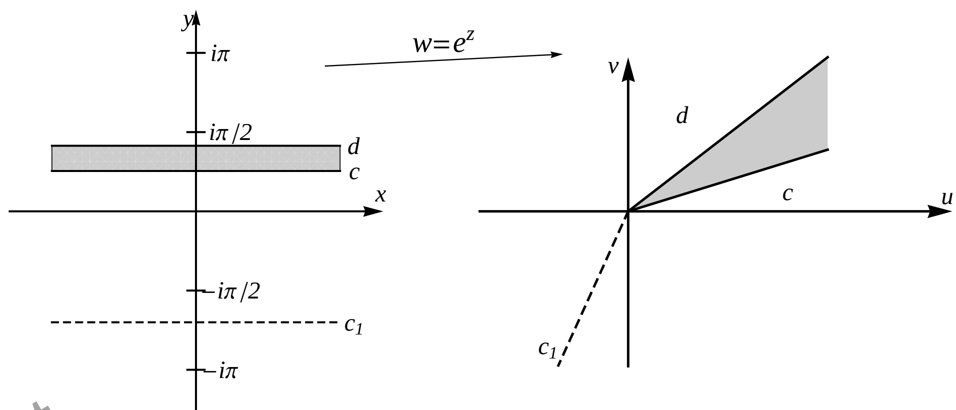
(ب) *خط $y = c$، c یک عدد حقیقی است.*

حل (آ) فرض کنید $z = a + iy$ نقطه‌ای دلخواه روی خط $x = a$ باشد. در این صورت داریم $f(z) = e^z = e^a e^{iy}$. بنابراین $|f(z)| = e^a$ و در نتیجه تصویر خط $x = a$ تحت $f(z) = e^z$ یک دایره‌ی Γ به مرکز مبدا و شعاع e^a است. اگر $a > ۰$، آن‌گاه چون $e^a > ۱$، شعاع دایره‌ی تصویر بزرگتر از واحد است و اگر $a < ۰$، آن‌گاه چون $e^a < ۱$، شعاع دایره‌ی تصویر کوچک‌تر از واحد است. توجه کنید که تصویر پاره خط $x = a$، $-\pi < y \leq \pi$، نیز تحت $f(z)$ همان دایره‌ی Γ است. هم‌چنین تصویر پاره خط $x = a$، $-\pi \leq c \leq y \leq d \leq \pi$ تحت $f(z)$ کمانی از دایره‌ی Γ است که آوندهای نقاط ابتدایی و انتهایی این کمان به ترتیب c و d هستند. اگر $x < a$، آن‌گاه $e^x < e^a$ و در نتیجه نقاط سمت چپ خط $x = a$ به داخل دایره و نقاط سمت راست خط $x = a$ به خارج دایره تصویر می‌شوند. (شکل ۳ را ببینید.)



شکل ۳: تصویر خط $x = a$ تحت $w = e^z$ دایره‌ی $|w| = e^a$ است.

(ب) فرض کنید $z = x + ic$ نقطه‌ای دلخواه روی خط $y = c$ باشد. در این صورت داریم $f(z) = e^z = e^x e^{ic}$ و در نتیجه $\arg(f(z)) = c$. چون e^x هر مقدار حقیقی مثبت را اختیار می‌کند، تصویر خط $y = c$ تحت $f(z) = e^z$ یک نیم خط با ابتدای مبدا مختصات است و نقاط روی آن دارای آوند ثابت c هستند. (شکل ۴ را ببینید.)



شکل ۴: تصویر نوار $c \leq \operatorname{Im} z \leq d$ تحت $w = e^z$ قطاع $c \leq \arg w \leq d$ است.

توابع مثلثاتی و هذلولوی مختلط را می‌توان به راحتی تعریف کرد. توابع هذلولوی مختلط شبیه توابع هذلولوی حقیقی تعریف می‌شوند:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{۲} \quad \text{و} \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{۲}.$$

برای تعریف توابع مثلثاتی مختلط ابتدا توجه می‌کنیم که اگر t یک عدد حقیقی باشد داریم $e^{it} = \cos t + i\sin t$ و $e^{-it} = \cos t - i\sin t$. بنابراین

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{۲} \quad \text{و} \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{۲i}.$$

با این مشاهده توابع مثلثاتی مختلط سینوس و کسینوس را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{۲} \quad \text{و} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{۲i}.$$

سایر توابع مثلثاتی مختلط به طریق معمول با استفاده از سینوس و کسینوس تعریف می‌شوند:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sec z = \frac{۱}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{۱}{\sin z}.$$

توجه کنید که داریم

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \cosh(-z) = \cosh z,$$
$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \sinh(-z) = -\sinh z.$$

بین توابع مثلثاتی و هذلولوی روابط جالبی برقرار است. مثلا داریم

$$\cosh(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{۲} = \cos z.$$

اگر در عبارت بالا iz را به جای z قرار دهیم خواهیم داشت $\cosh(-z) = \cos(iz)$. چون $\cosh(-z) = \cosh z$ به دست می‌آوریم

$$\cos(iz) = \cosh z.$$

به همین صورت داریم

$$\sinh(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{۲} = i\sin z, \quad \text{و} \quad \sin(iz) = i\sinh z.$$

اثبات بسیاری از رابطه‌های مثلثاتی و هذلولوی به سادگی انجام می‌شود. مثلا

$$\begin{aligned}
\cosh z\cosh w + \sinh z\sinh w &= \frac{e^z + e^{-z}}{۲}\frac{e^w + e^{-w}}{۲} + \frac{e^z - e^{-z}}{۲}\frac{e^w - e^{-w}}{۲} \\
&= \frac{۱}{۴}\left(e^{(z+w)} + e^{(z-w)} + e^{(-z+w)} + e^{-(z+w)}\right) + \\
&\quad \frac{۱}{۴}\left(e^{(z+w)} - e^{(z-w)} - e^{(-z+w)} + e^{-(z+w)}\right) \\
&= \frac{۱}{۲}\left(e^{(z+w)} + e^{-(z+w)}\right) \\
&= \cosh(z+w).
\end{aligned}$$

پس

$$\cosh(z+w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w$$

از این‌رو

$$\begin{aligned} \cos(z+w) &= \cosh(i(z+w)) \\ &= \cosh(iz+iw) \\ &= \cosh iz \cosh iw + \sinh iz \sinh iw \\ &= \cos z \cos w + i \sin z i \sin w \\ &= \cos z \cos w - \sin z \sin w \end{aligned}$$

به همین صورت می‌توان نشان داد

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z.$$

ریشه‌های $\sin z$ دقیقا ریشه‌های تابع مثلثاتی متناظر، یعنی $n\pi$، هستند. زیرا

$$\begin{aligned} \sin z = ۰ &\iff \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{۲i} = ۰ \\ &\iff e^{iz} = e^{-iz} \\ &\iff e^{۲iz} = ۱ \\ &\iff ۲z = ۲n\pi \\ &\iff z = n\pi. \end{aligned}$$

به همین صورت می‌توان نشان داد $\cos z = ۰$ اگر و تنها اگر $z = \frac{۲n-۱}{۲}\pi$، $n \in \mathbb{N}$.

اکنون قسمت‌های حقیقی و موهومی $\sin z$ و $\cos z$ را می‌یابیم. فرض کنید $z = x+iy$. با توجه به رابطه‌های $\sin(ix) = i\sinh x$ و $\cos(ix) = \cosh x$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \sin(iy) \cos x \\ &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \end{aligned}$$

و هم‌چنین

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos(x+iy) = \cos x \cos(iy) - \sin(iy) \sin x \\ &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y. \end{aligned}$$

مثال ۱۳. *تابع $w = \cos z$ خطوط $x = a$ و $y = c$ در صفحه‌ی z را به چه منحنی‌هایی در صفحه‌ی w تصویر می‌کند، که درآن $c \neq ۰$ و $۰ < a \leq \frac{\pi}{۲}$.*

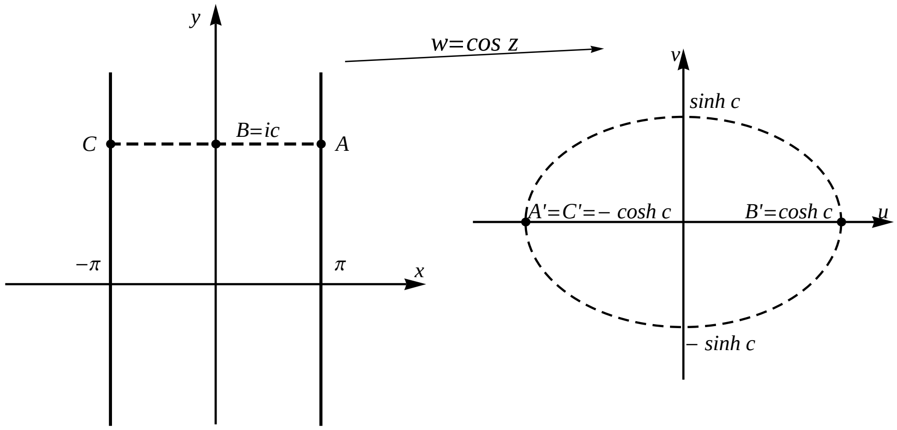
حل داریم

$$w = \cos z = \cos x \cos(iy) - \sin(iy) \sin x = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

بنابراین با فرض $u = \cos x \cosh y$ و $v = -\sin x \sinh y$ داریم $w = u + iv$. اکنون برای خط $y = c$ داریم $u = (\cosh c) \cos x$ و $v = -(\sinh c) \sin x$. در نتیجه با حذف x از معادله‌ی اخیر داریم

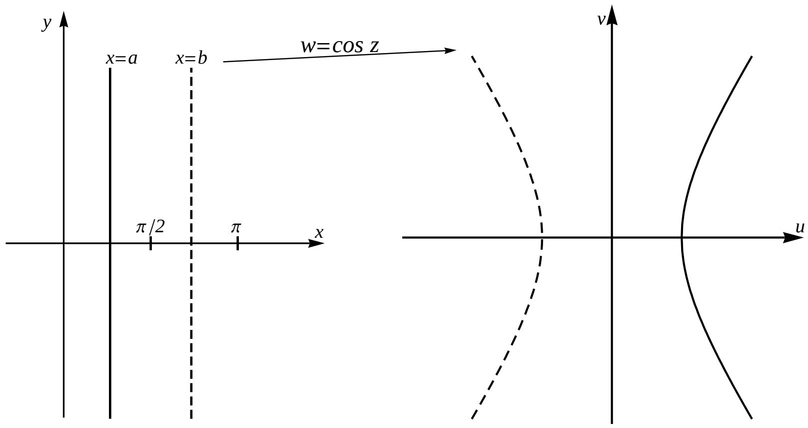
$$\frac{u^۲}{\cosh^۲ c} + \frac{v^۲}{\sinh^۲ c} = ۱$$

که معادله‌ی یک بیضی است. هم‌چنین تصویر پاره خط $y = c$، $-\pi < x \leq \pi$، نیز تحت $f(z) = \cos z$ همان بیضی است. (شکل ۵ را ببینید.)



شکل ۵: تصویر خط $y = c$ تحت $w = \cos z$ یک بیضی است.

علاوه بر آن تصویر پاره خط $y = c$، $-\pi \leq a \leq x \leq b \leq \pi$، تحت $f(z) = \cos z$ قسمتی از بیضی است. اکنون



شکل ۶: تصویر خط $x = a$ تحت $w = \cos z$ یک نیمه از یک هذلولی است.

برای خط $x = a$ داریم $u = (\cos a) \cosh y$ و $v = -(\sin a) \sinh y$. در نتیجه با حذف y از معادله‌ی اخیر داریم

$$\frac{u^۲}{\cos^۲ a} - \frac{v^۲}{\sin^۲ a} = ۱$$

که معادله‌ی یک هذلولی است. اگر $۰ < a \leq \frac{\pi}{۲}$، آن‌گاه $u > ۰$ و بنابراین تصویر مورد نظر نیمه سمت راست هذلولی است. (شکل ۶ را ببینید.) ■

دیدیم که اگر دامنه‌ی $f(z)=e^z$ را به نوار $\{z\in\mathbb{C}\mid \alpha<\operatorname{Im} z\le \alpha+۲\pi\}$ محدود کنیم، برد آن $\mathbb{C}\setminus\{۰\}$ خواهد بود و معکوس آن عبارت است از $f^{-۱}(z)=\ln|z|+i\arg z$، که در آن $\alpha\le \arg z\le\alpha+۲\pi$. بنابراین تابع لگاریتمی طبیعی مختلط را به ازای هر $z\neq ۰$ به صورت

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z$$

تعریف می‌کنیم. چون به ازای هر z، $\arg z$ دارای تعداد نامتناهی مقدار است، $\ln z$ تابع نیست. گوییم $\ln z$ تابع چندمقداری است. اگر به جای $\arg z$، آوند اصلی z را در نظر بگیریم شاخه‌ی اصلی لگاریتم به دست می‌آید که یک تابع (تابع تک‌مقداری) است. در واقع شاخه‌ی اصلی لگاریتم طبیعی به صورت

$$\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z$$

تعریف می‌شود. شاخه‌های دیگر لگاریتم به صورت

$$\ln z=\ln|z|+i\theta,\qquad \theta=\arg z,\quad \alpha<\theta\le\alpha+۲\pi$$

است. توجه کنید که اگر $z=re^{i\theta}$، آن‌گاه نمایش قطبی $\ln z$ را داریم:

$$\ln z=\ln r+i\theta.$$

مثال ۱۴. *مقدار* $\ln$ *و* Ln *را در چند نقطه می‌یابیم*

$$\ln i=\ln|i|+i\arg i=i\left(\frac{\pi}{۲}+۲n\pi\right),\quad n=۰,\pm۱,\pm۲,\dots$$
$$\operatorname{Ln} i=i\frac{\pi}{۲}$$
$$\ln(-۴)=\ln|-۴|+i\arg(-۴)=\ln ۴+i(\pi+۲n\pi),\quad n=۰,\pm۱,\pm۲,\dots$$
$$\operatorname{Ln}(-۴)=\ln ۴+i\pi$$
$$\ln(-۲i)=\ln|-۲i|+i\arg(-۲i)=\ln ۲+i\left(-\frac{\pi}{۲}+۲n\pi\right),\quad n=۰,\pm۱,\dots$$
$$\operatorname{Ln}(-۲i)=\ln ۲-i\frac{\pi}{۲}.\quad\blacksquare$$

خواص لگاریتم طبیعی:

$$\begin{aligned} e^{\ln z} &= e^{\ln|z|+i\arg z}=e^{\ln|z|}e^{i\arg z}=|z|e^{i\arg z}=z\\ \ln e^z &= \ln|e^z|+i\arg(e^z)=\ln(e^x)+i(y+۲n\pi)=x+i(y+۲n\pi)=z+۲n\pi i\end{aligned}$$

رابطه‌ی $\operatorname{Ln} e^z=z$ لزوماً برقرار نیست، مثلاً (توجه کنید $|e^{it}|=|\cos t+i\sin t|=۱$)

$$\operatorname{Ln} e^{۱+۲i\pi}=\ln|e^{۱+۲i}|+i\operatorname{Arg}(e^{۱+۲i\pi})=۱\neq ۱+۲i\pi.$$

داریم $\ln(zw)=\ln z+\ln w$، زیرا

$$\begin{aligned}\ln(zw) &= \ln|zw|+i\arg(zw)\\ &= \ln|z|+\ln|w|+i\arg(z)+i\arg(w)\\ &= \ln z+\ln w.\end{aligned}$$

به طور دقیق‌تر

$$\ln(zw) = \ln z + \ln w + ۲n\pi i.$$

به طور مشابه داریم

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{z}{w}\right) &= \ln\left|\frac{z}{w}\right| + i\arg\left(\frac{z}{w}\right) \\ &= \ln|z| - \ln|w| + i\arg(z) - i\arg(w) \\ &= \ln z - \ln w. \end{aligned}$$

به طور دقیق‌تر

$$\ln\left(\frac{z}{w}\right) = \ln z - \ln w + ۲n\pi i.$$

رابطه‌های بالا برای Ln لزوماً برقرار نیستند. مثلاً

$$\mathrm{Ln}\,(i^۲ \cdot i) = \mathrm{Ln}\, i^۳ = \mathrm{Ln}\,(-i) = \ln|-i| + i\mathrm{Arg}\,(-i) = \ln(۱) - i\frac{\pi}{۲} = -\frac{\pi}{۲}i$$

و

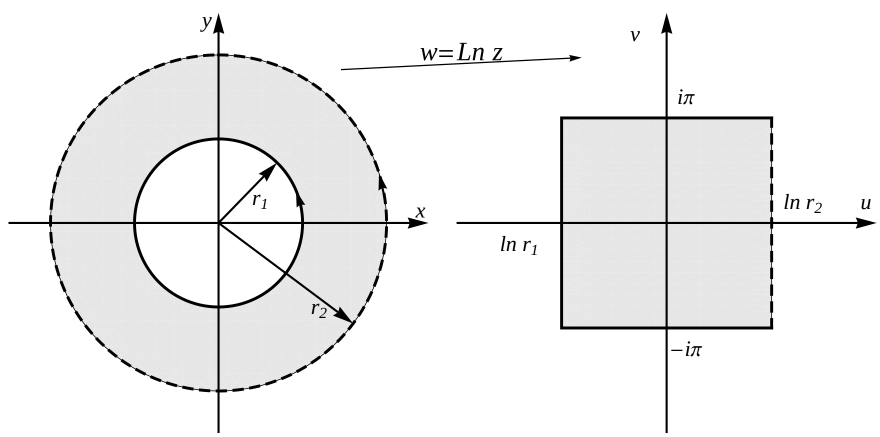
$$\mathrm{Ln}\, i^۲ + \mathrm{Ln}\, i = \mathrm{Ln}\,(-۱) + \mathrm{Ln}\, i = \ln|-۱| + i\mathrm{Arg}\,(-۱) + \ln|i| + i\mathrm{Arg}\,(i) = i\pi + i\frac{\pi}{۲}.$$

مثال ۱۵. *تصویر طوقه‌ی $A = \{z \in \mathbb{C} \mid r_۱ \le |z| < r_۲\}$ را تحت $\mathrm{Ln}\, z$ را بیابید.*

حل طبق تعریف داریم $\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z$. چون $r_۱ \le |z| < r_۲$ خواهیم داشت $\ln r_۱ \le \ln|z| < \ln r_۲$ و چون محدودیتی روی $\mathrm{Arg}\, z$ نیست، داریم $-\pi < \mathrm{Arg}\, z \le \pi$. بنابراین تصویر A تحت $\mathrm{Ln}\, z$ مستطیل

$$\{w = u + iv \mid \ln r_۱ \le u < \ln r_۲, \quad -\pi < v \le \pi\}$$

است (شکل ۷ را ببینید).



شکل ۷: تصویر طوقه‌ی $r_۱ \le |z| < r_۲$ تحت $w = \mathrm{Ln}\, z$ مستطیل $\ln r_۱ \le u < \ln r_۲$، $-\pi < v \le \pi$ است.

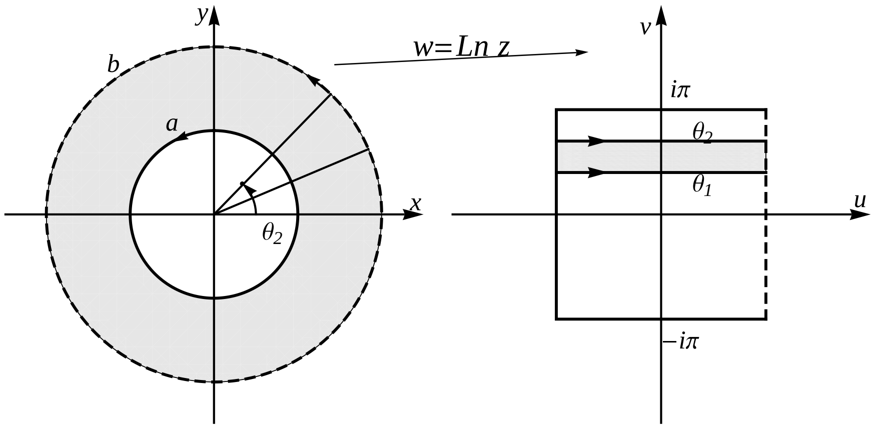
به همین صورت تصویر مجموعه‌ی

$$\{z \in \mathbb{C} \mid r_۱ \le |z| < r_۲, \quad -\pi < \theta_۱ \le \mathrm{Arg}\, z \le \theta_۲ \le \pi\}$$

تحت $\operatorname{Ln} z$ مستطیل

$$\{w = u + iv \mid \ln r_1 \leq u < \ln r_2, \quad -\pi < \theta_1 \leq v \leq \theta_2 \leq \pi\}$$

است (شکل ۸ را ببینید). ■



شکل ۸: تصویر قطاع $a \leq |z| < b$، $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ تحت $w = \operatorname{Ln} z$ مستطیل $\ln a \leq u \leq \ln b$، $\theta_1 \leq v \leq \theta_2$ است.

با استفاده از تابع لگاریتم و تابع نمایی می‌توان نمای مختلط را تعریف کرد. اگر α یک عدد مختلط ثابت باشد، به ازای هر $z \neq 0$ تعریف می‌کنیم $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$. چون $\ln z$ تابع چندمقداری است نتیجه می‌گیریم z^α تابع چند مقداری است. برای داشتن تابع تک‌مقداری باید آوند z را در یک فاصله به طول 2π محدود کنیم. در حالتی که آوند اصلی را در نظر بگیریم، یعنی از $\operatorname{Ln} z$ شاخه‌ی اصلی لگاریتم استفاده کنیم شاخه‌ی اصلی $z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$ به دست می‌آید. به عنوان مثال داریم

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i(\ln|i| + i\operatorname{Arg}(i))} = e^{i(\ln 1 + i\pi/2)} = e^{-\pi/2}.$$

مثال ۱۶. *همه‌ی مقادیر ممکن برای $\sqrt[n]{1}$ را بیابید.*

حل داریم

$$\sqrt[n]{1} = 1^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln 1} = e^{\frac{1}{n}(\ln|1| + i\arg 1)} = e^{\frac{1}{n}(0 + i2n\pi)} = e^{\frac{2k\pi i}{n}}.$$

بنابراین اگر قرار دهیم $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$، آن‌گاه داریم $\sqrt[n]{1} = \omega^k$ ، $k = 0, 1, \ldots, n-1$. توجه کنید که اگر قرار دهیم $z = \sqrt[n]{1}$، آن‌گاه $z^n = 1$ و بنابراین روش بالا یک روش دیگر برای محاسبه‌ی ریشه‌های nام واحد است. ■

توجه کنید که اگر α و β اعداد مختلط باشند، آن‌گاه

$$\ln \alpha^\beta = \ln e^{\beta \ln \alpha} = \beta \ln \alpha + 2n\pi i$$

رابطه‌ی $\operatorname{Ln} \alpha^\beta = \beta \ln \alpha$ لزوما برقرار نیست، زیرا مثلاً

$$\operatorname{Ln} i^3 = \operatorname{Ln}(-i) = \ln|-i| + i\operatorname{Arg}(-i) = \ln(1) - i\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}i$$

و

$$3\operatorname{Ln} i = 3(\ln|i| + i\operatorname{Arg}(i)) = 3(\ln(1) + i\frac{\pi}{2}) = 3\frac{\pi}{2}i$$

خلاصه فصل ۷، تبدیل‌های خطی-کسری

جلسه یازدهم ۱۲ مرداد ۱۳۹۳

برای مطالعه‌ی توابع مناسب است که به صفحه‌ی مختلط نقطه‌ی بی‌نهایت، که با ∞ نشان داده می‌شود را ضمیمه کنیم و دستگاه مختلط تعمیم یافته $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ را در نظر بگیریم. فرض کنید $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ اعداد مختلط ثابت باشند به طوری که $ad - bc \neq 0$. تابع

$$w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

را تبدیل دو خطی یا تبدیل خطی-کسری یا تبدیل موبیوس گوییم. T را در صفحه‌ی مختلط تعمیم یافته تعریف می‌کنیم: اگر $c \neq 0$، قرار می‌دهیم $T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ و $T(\infty) = \frac{a}{c}$؛ و اگر $c = 0$ قرار می‌دهیم $T(\infty) = \infty$. چون $w = \frac{az+b}{cz+d}$ داریم $czw + dw = az + b$ و در نتیجه $z = \frac{-dw+b}{cw-a}$. در نتیجه تبدیل خطی-کسری وارون‌پذیر است و وارون آن عبارت است از $T^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a}$. چون $czw + dw = az + b$ می‌توان نوشت

$$Azw + Bz + Cw + D = 0$$

و از این‌جا دلیل نام‌گذاری تبدیل دو خطی برای تابع $T(z)$ معلوم می‌شود.

دقیقا یک تبدیل خطی-کسری وجود دارد که سه نقطه‌ی متمایز z_1، z_2، و z_3 را به ترتیب به سه نقطه‌ی متمایز w_1، w_2، و w_3 تصویر می‌کند. ضابطه‌ی این تبدیل خطی-کسری عبارت است از

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}.$$

اگر یکی از نقاط برابر ∞ باشد، عامل‌های مربوط به آن را حذف می‌کنیم. به عنوان مثال اگر $w_2 = \infty$، ضابطه‌ی این تبدبل خطی-کسری عبارت است از

$$\frac{w-w_1}{w-w_3} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}.$$

چند مثال

مثال ۱۷. *تبدیل خطی-کسری بیابید که سه نقطه‌ی $z_1 = 1$، $z_2 = 0$، و $z_3 = i$ را به ترتیب به سه نقطه‌ی $w_1 = i$، $w_2 = -1$، و $w_3 = \infty$ تصویر کند.*

حل ضابطه‌ی تبدیل عبارت است از

$$\frac{w-w_1}{w_2-w_1} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}.$$

بنابراین

$$\frac{w-i}{-1-i} = \frac{(z-1)(0-i)}{(z-i)(0-1)}$$

و در نتیجه تبدیل خطی-کسری مورد نظر عبارت است از

$$w = \frac{z+i}{z-i}.$$

راه دیگر: فرض کنید $w = \frac{az+b}{cz+d}$ تبدیل خطی-کسری مورد نظر باشد. چون تحت w نقطه‌ی ۱ $= z_1$ به $w_1 = i$، نقطه‌ی ۰ $= z_2$ به ۱$-$ $= w_2$، و نقطه‌ی $z_3 = i$ به $w_3 = \infty$ تصویر می‌شود داریم

$$i = \frac{a+b}{c+d}, \quad -1 = \frac{b}{d}, \quad ci + d = 0.$$

بنابراین

$$ic + id = a + b, \quad b = -d, \quad c = id.$$

اگر در معادله‌ی اول به جای b مساوی آن یعنی $-d$، و به جای c مساوی آن یعنی id، را قرار دهیم

$$-d + id = a - d$$

و بنابراین $a = id$ و در نتیجه

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{idz-d}{idz+d} = \frac{iz-1}{iz+1} = \frac{z+i}{z-i}. \quad \blacksquare$$

مثال ۱۸. *تبدیل خطی-کسری بیابید که تحت آن نقاط ۲ و i ثابت بمانند و ۱ به ∞ تصویر شود.*

حل باید نقاط ۲ $= z_1$، $z_2 = i$ و ۱ $= z_3$ به ترتیب به نقاط ۲ $= w_1$، $w_2 = i$ و $w_3 = \infty$ تصویر شوند. بنابراین

$$\frac{w-2}{i-2} = \frac{(z-2)(i-1)}{(z-1)(i-2)}$$

و به دست می‌آوریم $w = \frac{(z-2)(i-1)}{z-1} + 2$. در نتیجه $w = \frac{(i+1)z-2i}{z-1}$.

راه دیگر: فرض کنید $w = \frac{az+b}{cz+d}$ تبدیل خطی-کسری مورد نظر باشد. چون ۲ و i تحت w ثابت هستند و ۱ به ∞ تصویر می‌شود داریم

$$2 = \frac{2a+b}{2c+d}, \quad i = \frac{ia+b}{ic+d}, \quad c + d = 0.$$

بنابراین

$$4c + 2d = 2a + b, \quad -c + id = ia + b, \quad c = -d.$$

اگر در معادلات اول و دوم به جای d مساوی آن یعنی $-c$ را قرار دهیم داریم

$$2c = 2a + b, \quad (-1-i)c = ia + b$$

اگر معادله‌ی دوم را از معادله‌ی اول کم کنیم خواهیم داشت $(3+i)c = (2-i)a$ و در نتیجه

$$a = \frac{3+i}{2-i}c = \frac{5+5i}{5} = (1+i)c.$$

علاوه بر آن داریم

$$b = 2c - 2a = 2c - 2(1+i)c = -2ic.$$

از این‌رو

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(1+i)cz - 2ic}{cz-c} = \frac{(1+i)z-2i}{z-1}. \quad \blacksquare$$

مثال ۱۹. *نشان دهید تبدیل خطی-کسری $w = T(z) = \frac{1}{z}$ خط و دایره را به خط و دایره تصویر می‌کند.*

حل ابتدا قسمت‌های حقیقی و موهومی w را می‌یابیم

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

بنابراین اگر $w = u + iv$، آن‌گاه

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v = \dfrac{-y}{x^2+y^2}. \end{cases} \tag{2}$$

علاوه بر آن چون $z = \frac{1}{w}$ به طریق مشابه داریم

$$\begin{cases} x = \dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y = \dfrac{-v}{u^2+v^2}. \end{cases} \tag{3}$$

از (۲) یا (۳) داریم

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{u^2+v^2}.$$

اکنون فرض کنید $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ اعداد ثابت باشند. معادله‌ی

$$a(x^2+y^2) + bx + cy + d = 0 \tag{4}$$

را در نظر می‌گیریم. اگر $a \neq 0$ معادله‌ی بالا معادله‌ی یک دایره است و اگر $a = 0$ معادله‌ی یک خط است. اکنون تحت $w = \frac{1}{z}$ معادله‌ی (۴) به معادله‌ی

$$a\left(\frac{1}{u^2+v^2}\right) + b\frac{u}{u^2+v^2} + c\frac{-v}{u^2+v^2} + d = 0$$

تصویر می‌شود. بنابراین تصویر معادله‌ی (۲) تحت $w = \frac{1}{z}$ عبارت است از

$$d(u^2+v^2) + bu - cv + a = 0 \tag{5}$$

اگر $d \neq 0$ معادله‌ی بالا معادله‌ی یک دایره است و اگر $d = 0$ معادله‌ی یک خط است. بنابراین تحت تابع $w = \frac{1}{z}$:

(آ) یک دایره که از مبدا نمی‌گذرد ($a \neq 0$ و $d \neq 0$) به یک دایره که از مبدا نمی‌گذرد تصویر می‌شود.

(ب) یک دایره که از مبدا می‌گذرد ($a \neq 0$ و $d = 0$) به یک خط که از مبدا نمی‌گذرد تصویر می‌شود.

(پ) یک خط که از مبدا نمی‌گذرد ($a = 0$ و $d \neq 0$) به یک دایره که از مبدا می‌گذرد تصویر می‌شود.

(ت) یک خط که از مبدا می‌گذرد ($a = 0$ و $d = 0$) به یک خط که از مبدا می‌گذرد تصویر می‌شود. ■

قضیه ۲۰. *هر تبدیل خطی-کسری دایره و خط را به دایره و خط تصویر می‌کند.* ■

مثال ۲۱. *تصویر ناحیه‌ی* $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq ۱\}$ *را تحت تبدیل خطی-کسری* $T(z) = \dfrac{z-۱}{۲-z}$ *بیابید.*

حل چون

$$w = \frac{z-۱}{۲-z} \iff ۲w - wz = z - ۱ \iff z(-w-۱) = -۱ - ۲w \iff z = \frac{۱+۲w}{۱+w}$$

با فرض $w = u + iv$ داریم

$$z = \frac{۱+۲w}{۱+w} = \frac{۱+۲w}{۱+w} \times \frac{۱+\overline{w}}{۱+\overline{w}} = \frac{۱+\overline{w}+۲w+۲|w|^۲}{|۱+w|^۲} = \frac{۱+۲u^۲+۲v^۲+۳u+iv}{(u+۱)^۲+v^۲},$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} z \geq ۱ \quad &\iff \quad \frac{v}{(u+۱)^۲+v^۲} \geq ۱ \\
&\iff \quad (u+۱)^۲ + v^۲ - v \leq ۰ \\
&\iff \quad (u+۱)^۲ + (v - \frac{۱}{۲})^۲ \leq \frac{۱}{۴} \\
&\iff \quad \left| w - (-۱ + \frac{۱}{۲}i) \right|^۲ \leq \frac{۱}{۴} \\
&\iff \quad \left| w - (-۱ + \frac{۱}{۲}i) \right| \leq \frac{۱}{۲}
\end{aligned}$$

و در نتیجه ناحیه مورد نظر یک یک دیسک بسته به مرکز $z_۰ = -۱ + \frac{۱}{۲}i$ و شعاع $\frac{۱}{۲}$ است.

مثال ۲۲. *تصویر ناحیه‌های زیر تحت تبدیل خطی-کسری* $T(z) = \dfrac{z}{۱-z}$ چیست؟

(آ) *دیسک واحد* $|z| < ۱$.

(ب) *نیم دیسک بسته‌ی* $\{z \mid |z| \leq ۱,\ \operatorname{Re} z \geq ۰\}$.

(پ) *طوقه‌ی* $\{z \mid ۱ < |z| < ۲\}$.

حل (آ) یک دایره تحت یک تبدیل خطی-کسری به دایره یا خط تصویر می‌شود. چون $T(۱) = \infty$، پس $w = T(z)$ دایره‌ی واحد $|z| = ۱$ را به یک خط تصویر می‌کند. با انتخاب دو نقطه روی دایره‌ی واحد، می‌توانیم این خط را مشخص کنیم. نقاط -۱ و i تحت w، به ترتیب به نقاط $-\frac{۱}{۲}$ و $-\frac{۱}{۲} + \frac{i}{۲}$ تصویر می‌شوند. پس تصویر دایره‌ی واحد $|z| = ۱$ تحت $w = T(z)$ برابر خط $\operatorname{Re} w = -\frac{۱}{۲}$ است. چون تبدیل خطی-کسری پیوسته و یک‌به‌یک است، تصویر دیسک واحد $|z| < ۱$ برابر $\operatorname{Re} w > -\frac{۱}{۲}$ یا $\operatorname{Re} w < -\frac{۱}{۲}$ است. برای یافتن تصویر درست، کافی است که یک نقطه را امتحان کنیم. چون $T(۰) = ۰$، یعنی مبدا تحت $w = T(z)$ به خودش تصویر می‌شود، پس $|z| < ۱$ به $\operatorname{Re} w > -\frac{۱}{۲}$ تصویر می‌شود.

به روش زیر نیز می‌توانیم عمل کنیم. ابتدا z را بر حسب w به دست می‌آوریم:

$$w = \frac{z}{۱-z} \iff w - wz = z \iff z + wz = w \iff z = \frac{w}{۱+w}.$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
|z| < ۱ \iff & \left|\frac{w}{۱+w}\right| < ۱ \\
\iff & |۱+w| < |w| \\
\iff & |۱+w|^۲ < |w|^۲ \\
\iff & (۱+w)(۱+\overline{w}) < |w|^۲ \\
\iff & ۱+w+\overline{w}+|w|^۲ < |w|^۲ \\
\iff & ۱+۲\mathrm{Re}\, w < ۰ \\
\iff & ۱+۲\mathrm{Re}\, w > -\frac{۱}{۲}
\end{aligned}
$$

(ب) طبق (آ) دیسک $|z| < ۱$ تحت w به $\mathrm{Re}\, w > -\frac{۱}{۲}$ تصویر می‌شود. علاوه بر آن، چون

$$z = \frac{w}{۱+w} = \frac{w}{۱+w} \times \frac{۱+\overline{w}}{۱+\overline{w}} = \frac{w+|w|^۲}{|۱+w|^۲},$$

با فرض $w = u + iv$ داریم

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\, z \geq ۰ \iff & \mathrm{Re}\,(w+|w|^۲) \geq ۰ \\
\iff & u + u^۲ + v^۲ \geq ۰ \\
\iff & (u+\frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۱}{۴} + v^۲ \geq ۰ \\
\iff & \left|w+\frac{۱}{۲}\right|^۲ - \frac{۱}{۴} \geq ۰ \\
\iff & \left|w+\frac{۱}{۲}\right|^۲ \geq \frac{۱}{۴}
\end{aligned}
$$

در نتیجه تصویر نیم دیسک بسته‌ی واحد $\{z \mid |z| \leq ۱, \ \ \mathrm{Re}\, z \geq ۰\}$ تحت $w = \frac{z}{۱-z}$، عبارت است از

$$\left\{w \mid \mathrm{Re}\, w \geq -\frac{۱}{۲}\right\} \cap \left\{w \mid \left|w+\frac{۱}{۲}\right| \geq \frac{۱}{۲}\right\}.$$

توجه کنید $\mathrm{Im}\, z \geq ۰$ به $\mathrm{Im}\, w \leq ۰$ تصویر می‌شود، که نشان می‌دهد نیم دیسک بسته‌ی $\{z \mid |z| \leq ۱, \ \ \mathrm{Im}\, z \geq ۰\}$ تحت $w = T(z)$ به $\left\{w \mid \mathrm{Re}\, w \geq -\frac{۱}{۲}, \ \ \mathrm{Im}\, w \leq ۰\right\}$ تصویر می‌شود.

(پ) چون

$$z = \frac{w}{۱+w}$$

داریم (توجه کنید $|1+w|^2 = (1+w)(1+\overline{w}) = 1 + \overline{w} + w + w\overline{w} = 1 + 2\mathrm{Re}\, w + |w|^2$)

$$\begin{aligned}
|z| > 1 \iff& \frac{|w|^2}{|1+w|^2} > 1 \\
\iff& w|^2 > |1+w|^2 \\
\iff& |w|^2 > 1 + 2\mathrm{Re}\, w + |w|^2 \\
\iff& 0 > 1 + 2\mathrm{Re}\, w \\
\iff& \mathrm{Re}\, w < -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

و هم‌چنین (با فرض $w = u + iv$) داریم

$$\begin{aligned}
|z| < 2 \iff& |w|^2 < 4|1+w|^2 \\
\iff& |w|^2 < 4(1 + 2\mathrm{Re}\, w + |w|^2) \\
\iff& 0 < 4 + 8\mathrm{Re}\, w + 3|w|^2 \\
\iff& 0 < 4 + 8u + 3u^2 + 3v^2 \\
\iff& 0 < \frac{4}{3} + \frac{8}{3}u + u^2 + v^2 \\
\iff& 0 < \frac{4}{3} + (u + \frac{4}{3})^2 - \frac{16}{9} + v^2 \\
\iff& (u + \frac{4}{3})^2 + v^2 > \frac{4}{9} \\
\iff& \left|w + \frac{4}{3}\right|^2 > \frac{4}{9} \\
\iff& \left|w + \frac{4}{3}\right| > \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

بنابراین ناحیه‌ی $|z| > 1$ به $\mathrm{Re}\, w < -\frac{1}{2}$ و ناحیه‌ی $|z| < 2$ به $\left|w + \frac{4}{3}\right| > \frac{2}{3}$ تصویر می‌شود و در نتیجه ناحیه‌ی مورد نظر عبارت است از

$$\left\{w \mid \mathrm{Re}\, w < \frac{1}{2}\right\} \cap \left\{w \mid \left|w + \frac{4}{3}\right| > \frac{2}{3}\right\}. \quad \blacksquare$$

خلاصه فصل ۷، مشتق توابع مختلط
جلسه دوازدهم ۱۳ مرداد ۱۳۹۳

یادآوری می‌کنیم که یک تابع مختلط یک متغیره تابعی است که دامنه و برد آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی اعداد مختلط است. پس می‌توان حد و پیوستگی و مشتق‌پذیری آن‌را مشابه توابع حقیقی تعریف کرد. از طرف دیگر یک تابع مختلط را می‌توان به عنوان یک تابع که دامنه و برد آن زیر مجموعه‌ای از مجموعه‌ی بردارها با درایه‌های حقیقی است (یک تابع برداری) درنظر گرفت. پس می‌توان حد و پیوستگی و مشتق‌پذیری آن‌را مشابه توابع برداری تعریف کرد. هر دو گونه تعریف با هم معادل هستند. قضایای مشابه حدود توابع یک متغیره و توابع برداری برای حد توابع مختلط برقرار است. به ویژه حد یک تابع، در صورت وجود، یکتا است. اگر $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ گوییم $f(z)$ در z_0 پیوسته است. مشابه قضایای پیوستگی توابع یک متغیره و توابع برداری می‌توان نشان داد که مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و ترکیب توابع پیوسته مجدداً پیوسته است. علاوه بر آن تابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در نقطه‌ی $z_0 = x_0 + iy_0$ پیوسته است اگر و تنها اگر $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در (x_0, y_0) پیوسته باشند.

قضیه ۲۳. *تابع $f(z) = \operatorname{Arg} z$ روی نیم محور حقیقی منفی، یعنی مجموعه‌ی*

$$\begin{aligned}\{z \mid \operatorname{Im} z = 0,\ \ \operatorname{Re} z \le 0\} &= \{z = x+iy \mid \ y = 0,\ x \le 0\} \\ &= \{z \mid \operatorname{Arg} z = \pi\},\end{aligned}$$

پیوسته نیست و در هر نقطه که روی نیم‌محور حقیقی منفی نباشد، پیوسته است.

اثبات. تابع $\operatorname{Arg} z$ در 0 تعریف نشده است. بنابراین فرض می‌کنیم $z_0 \ne 0$ نقطه‌ای باشد که $\operatorname{Arg} z_0 = \pi$. در این صورت چون

$$\lim_{\substack{z\to z_0 \\ 0<\operatorname{Arg} z<\pi}} \operatorname{Arg} z = i\pi$$

(یعنی از نقاط بالای محور xها به z_0 نزدیک شویم) و

$$\lim_{\substack{z\to z_0 \\ -\pi<\operatorname{Arg} z<0}} \operatorname{Arg} z = -i\pi$$

(یعنی از نقاط پایین محور xها به z_0 نزدیک شویم). پس $\lim_{z\to z_0} \operatorname{Arg} z$ وجود ندارد. پس $\operatorname{Arg} z$ در z_0 پیوسته نیست. ■

مشتق یک تابع مختلط شبیه مشتق توابع حقیقی تعریف می‌شود. اگر تابع مختط $f(z)$ در همسایگی نقطه‌ی z_0 تعریف شده باشد مقدار حد

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

را (در صورت وجود) مشتق f در z_0 گوییم و با $f'(z_0)$ نشان می‌دهیم. در صورتی که حد بالا وجود نداشته باشد، گوییم f در z_0 مشتق‌پذیر نیست. توجه کنید با فرض $\Delta z = z - z_0$ می‌توان نوشت

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

مطابق معمول اگر $w = f(z)$، آن‌گاه $f'(z)$ را با $\frac{df}{dz}$ یا با $\frac{dw}{dz}$ نیز نشان می‌دهیم. با قرار دادن $\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z)$ مشتق f در z را با حد زیر نیز نشان می‌دهیم.

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

اگر $f(z)$ در z_0 مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $f(z)$ در z_0 پیوسته است، زیرا

$$\lim_{z\to z_0}(f(z) - f(z_0)) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0) = f'(z_0) \times 0 = 0.$$

قواعد مشتق‌گیری برای توابع حقیقی در مورد توابع مختلط نیز برقرار هستند.

قضیه ۲۴. *فرض کنید f و g توابع مشتق‌پذیر در z باشند. در این صورت*

(آ) $f + g$ *در z مشتق‌پذیر است و* $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$.

(ب) fg *در z مشتق‌پذیر است و* $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.

(پ) *اگر* $g(z) \neq 0$*، آن‌گاه f/g در z مشتق‌پذیر است و*

$$(f/g)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}. \quad \blacksquare$$

قضیه ۲۵. *(قاعده‌ی زنجیری) اگر f در z و g در $w = f(z)$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه $g \circ f$ در z مشتق‌پذیر است و* $(g\circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$. $\blacksquare$

قضیه ۲۶. *(قاعده‌ی هوپیتال) فرض کنید $f(z)$ و $g(z)$ در z_0 مشتق‌پذیر باشند. فرض کنید z_0 صفر مرتبه‌ی m از $f(z)$ و صفر مرتبه‌ی n از $g(z)$ باشد. (z_0 را یک صفر مرتبه‌ی m از $f(z)$ گوییم هرگاه* $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ *و* $f^{(m)}(z_0) \neq 0$*.) در این صورت*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} 0 & m > n \\ \infty & m < n \\ \dfrac{f^{(m)}(z_0)}{g^{(m)}(z_0)} & m = n. \end{cases} \quad \blacksquare$$

اکنون یک شرط لازم و مهم برای مشتق‌پذیری، موسوم به معادلات کشی-ریمان را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۲۷. *(معادلات کشی ریمان) فرض کنید* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *در همسایگی* $z_0 = x_0 + iy_0$ *تعریف شده و* $f'(z_0)$ *وجود داشته باشد. در این صورت*

$$f'(z_0) = f_x(z_0) \quad \text{و} \quad f'(z_0) = -if_y(z_0).$$

بنابراین $f_x(z_0) = -if_y(z_0)$ *و در نتیجه با مقایسه‌ی قسمت‌های حقیقی و موهومی معادله‌های زیر را داریم*

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \end{cases}$$

اثبات. فرض کنید $w = f(z)$، $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ و $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$. در این صورت به سادگی می‌توان دید که $\Delta w = \Delta u + i\Delta v$. چون $\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$ وجود دارد، بنا به یکتایی حد، مقدار حد به مسیری که روی آن $\Delta z \to 0$

بستگی ندارد. اگر Δz را در طول محور x-ها به صفر نزدیک کنیم، یعنی $\Delta y = 0$ و $\Delta z = \Delta x$، داریم

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = f_x(z_0),$$

و اگر Δz را در طول محور y-ها به صفر نزدیک کنیم، یعنی $\Delta x = 0$ و $\Delta z = i\Delta y$، داریم

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = -i(v_y(x_0, y_0) + iu_y(x_0, y_0)) = -if_y(z_0).$$

بنابراین $f'(z_0) = f_x(z_0)$ و $f'(z_0) = -if_y(z_0)$. ■

معمولاً برای اختصار از نوشتن نقطه‌ی (x_0, y_0) صرف نظر کرده و معادلات کشی-ریمان را به صورت های زیر می‌نویسیم

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x. \end{cases} \quad \text{یا} \quad f_x = -if_y$$

لازم است متذکر شویم که عکس قضیه‌ی بالا درست نیست، یعنی اگر معادلات کشی-ریمان در نقطه‌ی z_0 برقرار باشند، آن‌گاه ممکن است $f(z)$ در z_0 مشتق‌پذیر نباشد.

مثال ۲۸. *نشان دهید که تابع $f(z) = |z|^2$ فقط در $x = 0$ مشتق‌پذیر است.*

حل قرار می‌دهیم $u(x,y) = x^2 + y^2$ و $v(x,y) = 0$. در این صورت $f(z) = u + iv$. فرض کنید $f(z)$ در نقطه‌ی $z_0 = x_0 + iy_0$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت باید معادلات کشی-ریمان برقرار باشند، یعنی

$$u_x = 2x_0 = v_y = 0$$
$$v_y = 2y_0 = -u_x = 0$$

و بنابراین $x_0 = y_0 = 0$. در نتیجه معادلات کشی-ریمان فقط در $z = 0$ برقرار هستند. برای بررسی مشتق پذیری $f(z)$ در $z = 0$ از تعریف استفاده می‌کنیم. چون داریم

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{z\overline{z}}{z} = \lim_{z \to 0} \overline{z} = 0$$

پس $f(z)$ در $z = 0$ مشتق‌پذیر است و $f'(0) = 0$. ■

قضیه ۲۹. *فرض کنید $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در همسایگی $z_0 = x_0 + iy_0$ تعریف شده و مشتقات جزیی مرتبه‌ی اول u و v درآن همسایگی وجود داشته و در (x_0, y_0) پیوسته باشند. اگر u و v در (x_0, y_0) در معادلات کشی-ریمان صدق کند، آن‌گاه $f(z)$ در z_0 مشتق‌پذیر است.*

مثال ۳۰. *فرض کنید $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$. در این صورت $f(z) = u + iv$، که در آن $u(x,y) = x^2 + y^2$ و $v(x,y) = 0$. داریم $u_x = 2x$، $v_y = 0$، $u_y = 2y$ و $v_x = 0$. بنابراین معادلات کشی-ریمان در نقطه‌ی $z \neq 0$ برقرار نیستند و در نتیجه $f(z)$ به ازای هر $z \neq 0$ مشتق‌پذیر نیست. از طرف دیگر چون معادلات کشی-ریمان در نقطه‌ی $z = 0$ برقرار هستند و مشتقات جزیی u و v در همسایگی $z = 0$ موجود و پیوسته‌اند، پس f در $z = 0$ مشتق‌پذیر است و* $f'(0) = u_x(0,0) + iv_x(0,0) = 0$. ■

مثال ۳۱. *می‌دانیم $f(z) = z^2$ به ازای هر z مشتق‌پذیر است و $f'(z) = 2z$. می‌خواهیم این نتیجه را از قضیه‌ی بالا به دست آوریم. داریم $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$. قرار می‌دهیم $u(x,y) = x^2 - y^2$ و $v(x,y) = 2xy$. در این صورت $f(z) = u + iv$. چون*

$$\begin{cases} u_x = 2x = v_y \\ u_y = -2y = -v_x \end{cases}$$

پس معادلات کشی-ریمان به ازای هر z برقرار هستند. اکنون چون مشتقات جزیی u و v در هر نقطه موجود و پیوسته‌اند، $f(z)$ در هر نقطه‌ی z مشتق‌پذیر است و داریم

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + 2iy = 2(x+iy) = 2z. \quad \blacksquare$$

مثال ۳۲. *تابع e^z در همه جا مشتق‌پذیر است و داریم $\frac{d}{dz}e^z = e^z$.*

حل می‌توان نوشت $e^z = u(x,y) + iv(x,y)$، که در آن $u(x,y) = e^x \cos y$ و $v(x,y) = e^x \sin y$. چون

$$u_x = e^x \cos y = v_y \qquad \text{و} \qquad u_y = -e^x \sin y = -v_x$$

معادلات کشی-ریمان در همه‌ی نقاط صفحه برقرارند. به علاوه چون مشتقات جزیی u و v در همه‌ی نقاط موجود و پیوسته‌اند، تابع e^z در هر نقطه‌ی دلخواه از صفحه‌ی مختلط مشتق‌پذیر است و داریم

$$\frac{d}{dz}e^z = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z. \quad \blacksquare$$

تابع $f(z)$ را تابع تام گوییم، هرگاه در هر نقطه‌ی صفحه‌ی مختلط مشتق‌پذیر باشد. در مثال بالا دیدیم که تابع e^z یک تابع تام است. توابع $\sin z$ و $\cos z$ تام هستند، زیرا ترکیب خطی از توابع تام e^{iz} و e^{-iz} هستند. به سادگی می‌توان دید مشتق این توابع شبیه توابع حقیقی متناظر است، یعنی

$$\frac{d}{dz}\sin z = \cos z \qquad \text{و} \qquad \frac{d}{dz}\cos z = -\sin z.$$

توابع $\sinh z$ و $\cosh z$ نیز تام هستند، زیرا ترکیب خطی از توابع تام e^z و e^{-z} هستند. هم‌چنین توجه کنید که داریم

$$\frac{d}{dz}\sinh z = \cosh z \qquad \text{و} \qquad \frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z.$$

یاد آوری می‌کنیم که اگر $z = x + iy$ یک عدد مختلط ناصفر باشد. مختصات قطبی $z = re^{i\theta}$ را داریم که در آن $r = |z|$ و $\theta = \arg z$. در قضیه‌ی بعد معادلات کشی-ریمان در مختصات قطبی را به دست می‌آوریم.

قضیه ۳۳. *فرض کنید $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$. فرض کنید $f = u + iv$ در نقطه‌ی $z = re^{i\theta}$، $r \neq 0$، مشتق‌پذیر با مشتقات جزیی پیوسته باشد. در این صورت $f_\theta = irf_r$، یعنی $u_\theta + iv_\theta = ir(u_r + iv_r)$ و در نتیجه*

$$\begin{cases} u_\theta = -rv_r \\ v_\theta = ru_r. \end{cases}$$

علاوه بر آن داریم $f'(z) = e^{-i\theta}f_r$ و $f'(z) = -\frac{i}{r}e^{-i\theta}f_\theta$.

اثبات. ابتدا توجه کنید که اگر $g(x) = e^{ix} = \cos x + i\sin x$، که در آن $x \in \mathbb{R}$، آن‌گاه

$$g'(x) = -\sin x + i\cos x = i(\cos x + i\sin x) = ie^{ix}.$$

برای $z = re^{i\theta} \neq \circ$ با استفاده از قاعده‌ی زنجیری داریم

$$f_r = f_z z_r = f'(z)e^{i\theta} \quad \text{و} \quad f_\theta = f_z z_\theta = f'(z) i r e^{i\theta}.$$

بنابراین

$$f'(z) = e^{-i\theta} f_r \quad \text{و} \quad f'(z) = \frac{۱}{ir} e^{-i\theta} f_\theta$$

و در نتیجه $f_\theta = irf_r$، یعنی

$$u_\theta + iv_\theta = ir(u_r + iv_r).$$

با مقایسه‌ی دو طرف تساوی اخیر داریم

$$u_\theta = -rv_r \quad \text{و} \quad v_\theta = ru_r. \quad \blacksquare$$

مثال ۳۴. *می‌دانیم $f(z) = \frac{۱}{z}$ به ازای هر $z \neq \circ$ مشتق‌پذیر است و $f'(z) = \frac{-۱}{z^۲}$. می‌خواهیم این نتیجه را از مطلب بالا به دست آوریم. فرض کنید $z = re^{i\theta}$. داریم*

$$f(z) = \frac{۱}{re^{i\theta}} = \frac{۱}{r} e^{-i\theta}.$$

در این صورت

$$f_r = -\frac{۱}{r^۲} e^{-i\theta}, \quad f_\theta = -\frac{i}{r} e^{-i\theta}$$

و بنابراین $f_\theta = \frac{-ir}{r^۲} e^{-i\theta} = irf_r$. پس معادلات کشی- ریمان به ازای هر z برقرار هستند. اکنون چون مشتقات جزیی f در هر نقطه موجود و پیوسته‌اند، $f(z)$ در هر نقطه‌ی z مشتق‌پذیر است و

$$f'(z) = e^{-i\theta} f_r = e^{-i\theta} \frac{-۱}{r^۲} e^{-i\theta} = \frac{۱}{r^۲ e^{۲i\theta}} = \frac{-۱}{z^۲}. \quad \blacksquare$$

اکنون مشتق‌پذیری تابع لگاریتم طبیعی را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۳۵. *شاخه‌ی اصلی لگاریتم $\mathrm{Ln}\, z = \ln |z| + i\mathrm{Arg}\, z$ در هر نقطه‌ی z که روی نیم محور حقیقی منفی نباشد مشتق‌پذیر است و $\frac{d}{dz}\mathrm{Ln}\, z = \frac{۱}{z}$.*

اثبات. طبق قضیه‌ی ۲۳ تابع $\mathrm{Arg}\, z$ روی مجموعه‌ی A پیوسته نیست، که در آن A نیم‌محور حقیقی منفی است. از این‌رو تابع $\mathrm{Ln}\, z = \ln |z| + i\mathrm{Arg}\, z$ روی A پیوسته نیست. اکنون برای اثبات مشتق‌پذیری $\mathrm{Ln}\, z$ برای $z \in \mathbb{C} \setminus A$ نمایش قطبی $\mathrm{Ln}\, z$ را در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $u(r,\theta) = \ln r$ و $v(r,\theta) = \theta$، که در آن $-\pi < \theta < \pi$. داریم

$$\ln z = u(r,\theta) + iv(r,\theta) = \ln r + i\theta.$$

چون

$$u_\theta = \circ = -rv_r, \quad \text{و} \quad v_\theta = ۱ = ru_r$$

پس معادلات کشی-ریمان برقرارند. علاوه بر آن مشتقات جزیی u و v نسبت به r و θ موجود و پیوسته‌اند. بنابراین $\mathrm{Ln}\, z$ (برای هر $z = re^{i\theta}$ که $r > \circ$ و $-\pi < \theta < \pi$) مشتق‌پذیر است و

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Ln}\, z = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = e^{-i\theta}\left(\frac{۱}{r} + i\circ\right) = \frac{۱}{re^{i\theta}} = \frac{۱}{z}. \quad \blacksquare$$

مشابه قضیه‌ی بالا فرض کنید $\ln z = \ln|z| + i\theta$، که در آن $\theta = \arg z$ و $\alpha < \theta < \alpha + ۲\pi$، یک شاخه از لگاریتم طبیعی باشد. در این صورت $\ln z$ برای هر z که $\arg z = \alpha$ پیوسته نیست و برای هر z که $\alpha < \arg z < \alpha + ۲\pi$ مشتق‌پذیر است و $\frac{d}{dz}\ln z = \frac{۱}{z}$.

فرض کنید $\alpha \in \mathbb{C}$ عدد ثابتی باشد. تابع $f(z) = z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$ را در نظر می‌گیریم. چون $\operatorname{Ln} z$ در همه جا به جز نیم محور حقیقی منفی مشتق‌پذیر است، تابع z^α نیز چنین است و با توجه به قاعده‌ی رنجیری داریم

$$\frac{d}{dz}z^\alpha = \frac{d}{dz}e^{\alpha \operatorname{Ln} z} = \frac{\alpha}{z}e^{\alpha \operatorname{Ln} z} = \alpha z^{-۱} z^\alpha = \alpha z^{\alpha-۱}.$$

تعریف ۳۶. *تابع $f(z)$ را در نقطه‌ی $z_۰$ تحلیلی گوییم هرگاه در یک همسایگی $z_۰$ مشتق‌پذیر باشد. $f(z)$ را در ناحیه‌ی R تحلیلی گوییم هرگاه در هر نقطه‌ی آن ناحیه تحلیلی باشد. تابع $f(z)$ را تام می‌نامیم اگر در هر نقطه‌ی صفحه‌ی مختلط تحلیلی باشد.*

مثال ۳۷. *اگر تابع تحلیلی f در دامنه‌ی D فقط مقادیر حقیقی اختیار کند، آن‌گاه f روی D تابعی ثابت است.*

حل طبق فرض داریم $f(z) = u(x,y) + i۰$. پس بنابه معادلات کشی-ریمان در D داریم $u_x = ۰$ و $u_y = ۰$ بنابراین $f(z) = u(x,y)$ تابعی ثابت است. ■

مثال ۳۸. *اگر f و $\bar{f}$ در دامنه‌ی D تحلیلی باشند، آن‌گاه f روی D تابعی ثابت است.*

حل فرض کنید $f = u + iv$. چون f در D تحلیلی است با استفاده از معادلات کشی-ریمان در D داریم

$$u_x = v_y \quad \text{و} \quad u_y = -v_x.$$

اکنون چون $\bar{f} = u - iv$ در D تحلیلی است با استفاده از معادلات کشی-ریمان در D داریم

$$u_x = (-v)_y \quad \text{و} \quad u_y = -(-v)_x.$$

پس

$$u_x = -v_y \quad \text{و} \quad u_y = v_x.$$

در نتیجه $u_y = ۰ = u_x$ و $v_y = ۰ = v_x$. بنابراین u و v توابع ثابت روی D هستند. از این رو f روی D تابع ثابت است. ■

مثال ۳۹. *اگر f و $|f|$ در دامنه‌ی D تحلیلی باشند، آن‌گاه f تابعی ثابت است.*

حل چون $|f|$ تابع تحلیلی با مقدار حقیقی است، طبق مثال ۳۷، $|f| = c$ تابعی ثابت است. پس $|f|^۲ = f\bar{f} = c^۲$ تحلیلی است. اگر به ازای یک $z_۰ \in D$ داشته باشیم $f(z_۰) = ۰$، آن‌گاه $c^۲ = f(z_۰)\overline{f(z_۰)} = ۰$ و در نتیجه $f(z) = ۰$، به ازای هر $z \in D$. پس فرض کنید $f(z) \neq ۰$، به ازای هر $z \in D$. اکنون چون f و $\bar{f} = c^۲/f$ در D تحلیلی هستند بنابه طبق مثال ۳۸، f روی D ثابت است. ■

قضیه‌ی بعد بیان می‌دارد اعمال جبری روی توابع تحلیلی به توابع تحلیلی منجر می‌شوند، که اثبات را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

قضیه ۴۰. *اگر $f(z)$ و $g(z)$ در z_0 تحلیلی باشند، آن‌گاه $(f+g)(z)$ و $kf(z)$، k عدد ثابت، نیز در z_0 تحلیلی هستند. اگر $f(z)$ در z_0 و $g(z)$ در $f(z_0)$ تحلیلی باشد، آن‌گاه $g \circ f$ در z_0 تحلیلی است.* ■

مثال ۴۱. *فرض کنید $f(z) = u + iv$ در دامنه‌ی D تحلیلی باشد. چون توابع e^z و $f(z) = u + iv$ تحلیلی هستند، $e^{f(z)} = e^u \cos v + ie^u \sin v$ در D تحلیلی است.* ■

فرض کنید تابع $f(z) = u + iv$ در دامنه‌ی D تحلیلی باشد. بعداً می‌بینیم که $f(z)$ از هر مرتبه‌ای مشتق‌پذیر است. چون $f'(z) = f_x$، با مشتق‌گیری مجدد داریم

$$f''(z) = (f'(z))_x = f_{xx}.$$

علاوه بر آن چون $f'(z) = -if_y$ با مشتق‌گیری مجدد داریم

$$f''(z) = -i(f'(z))_y = -f_{yy}.$$

در نتیجه $f_{xx} + f_{yy} = 0$. از اینجا نتیجه می‌شود $u_{xx} + u_{yy} = 0$ و $v_{xx} + v_{yy} = 0$. این مشاهدات به تعریف زیر منجر می‌شود.

تعریف ۴۲. *تابع حقیقی $h(x,y)$ را در دامنه‌ی D همساز گوییم، اگر در D مشتقات جزیی مرتبه‌ی اول و دوم پیوسته داشته باشد و در معادله‌ی لاپلاس $h_{xx} + h_{yy} = 0$ صدق کند.*

دیدیم که اگر $f = u + iv$ در دامنه‌ی D تحلیلی باشد، آن‌گاه u و v در D همساز هستند. حال فرض کنید $h(x,y)$ و $k(x,y)$ دو تابع با مشتقات جزیی مرتبه‌ی اول و دوم پیوسته در دامنه‌ی D باشند و در معادلات کشی-ریمان صدق کنند، یعنی $h_x = k_y$ و $h_y = -k_x$. در این صورت تابع $f = h + ik$ در D تحلیلی است و علاوه بر آن h و k در D همساز هستند. در این حالت گوییم k مزدوج همساز h است.

مثال ۴۳. *مزدوج همساز $u = y^3 - 3x^2y$ را (در صورت وجود) بیابید.*

حل چون $u_{xx} = -6y$ و $u_{yy} = 6y$ داریم $u_{xx} + u_{yy} = 0$. بنابراین u تابعی همساز است. پس تابع $v = v(x,y)$ وجود دارد که $u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$. در نتیجه

$$\begin{cases} v_y = -6xy \\ v_x = -3y^2 + 3x^2. \end{cases}$$

اگر از معادله‌ی اول نسبت به y انتگرال بگیریم خواهیم داشت $v(x,y) = -3xy^2 + h(x)$. با مشتق‌گیری از تابع $v(x,y)$ نسبت به x و مقایسه‌ی آن با معادله‌ی دوم به دست می‌آوریم $-3y^2 + h'(x) = -3y^2 + 3x^2$. بنابراین $h'(x) = 3x^2$ و در نتیجه $h(x) = x^3 + c$. از این‌رو $v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + c$. ■

مثال ۴۴. *تابع تحلیلی $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ را (در صورت وجود) بیابید که در آن*

$$u(x,y) = e^{-y}(x \cos x - y \sin x).$$

حل داریم

$$u_x = e^{-y}(\cos x - x\sin x - y\cos x)$$
$$u_{xx} = e^{-y}(-۲\sin x - x\cos x + y\sin x).$$

همچنین داریم

$$u_y = -e^{-y}(x\cos x - y\sin x) + e^{-y}(-\sin x)$$
$$u_{yy} = e^{-y}(x\cos x - y\sin x) - ۲e^{-y}(-\sin x).$$

بنابراین $u_{xx} + u_{yy} = ۰$ و u تابعی همساز است. پس تابع $v = v(x,y)$ وجود دارد که $u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$. در نتیجه

$$\begin{cases} v_y = e^{-y}(\cos x - x\sin x - y\cos x) \\ v_x = e^{-y}(x\cos x - y\sin x) - e^{-y}(-\sin x). \end{cases}$$

اگر از معادله‌ی دوم نسبت به x انتگرال بگیریم داریم

$$v(x,y) = e^{-y}(x\sin x + y\cos x) + h(y).$$

با مشتق‌گیری از $v(x,y)$ نسبت به y و مقایسه‌ی آن با معادله‌ی اول داریم

$$-e^{-y}(x\sin x + y\cos x) + e^{-y}\cos x + h'(y) = e^{-y}(\cos x - x\sin x - y\cos x).$$

پس $h'(y) = ۰$ و در نتیجه $h(y) = c$. از این‌رو $v(x,y) = e^{-y}(x\sin x + y\cos x) + c$. در نتیجه

$$\begin{aligned} f(z) &= u + iv \\ &= e^{-y}(x\cos x - y\sin x) + ie^{-y}(x\sin x + y\cos x) + ic \\ &= xe^{-y}(\cos x + i\sin x) + iye^{-y}(\cos x + i\sin x) + ic \\ &= xe^{-y}e^{ix} + iye^{-y}e^{ix} + ic \\ &= ze^{iz} + ic. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

مثال ۴۵. *تابع تحلیلی $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ را (در صورت وجود) بیابید که در آن*

$$u(x,y) = (x^۲ - y^۲ + ۱)^۲ - ۴x^۲y^۲.$$

حل داریم

$$u_x = ۴x(x^۲ - y^۲ + ۱) - ۸xy^۲ = ۴x^۳ - ۱۲xy^۲ + ۴x$$
$$u_y = -۴y(x^۲ - y^۲ + ۱) - ۸x^۲y = -۱۲x^۲y + ۴y^۳ - ۴y.$$

طبق معادلات کشی-ریمان ($u_x = v_y$، $u_y = -v_x$) داریم

$$v_y = ۴x^۳ - ۱۲xy^۲ + ۴x$$
$$v_x = ۱۲x^۲y - ۴y^۳ + ۴y.$$

با انتگرال‌گیری از معادله‌ی اول نسبت به y داریم $v(x,y) = ۴x^۳y - ۴xy^۳ + ۴xy + g(x)$. اگر از معادله‌ی اخیر نسبت به x مشتق بگیریم و با معادله‌ی دوم مقایسه کنیم خواهیم داشت $g'(x) = ۰$. در نتیجه $g(x) = c_۱$ و داریم $v(x,y) = ۴x^۳y - ۴xy^۳ + ۴xy + c_۱$. ■

مثال ۴۶. *همه‌ی توابع تحلیلی $f(z)$ را بیابید که* $\operatorname{Re} f'(z) = ۳x^۲ - ۴y - ۳y^۲$.

حل فرض کنید $f(z) = u + iv$. در این صورت $f'(z) = f_x = u_x + iv_x$ و در نتیجه

$$u_x = \operatorname{Re} f'(z) = ۳x^۲ - ۴y - ۳y^۲.$$

با انتگرال‌گیری نسبت به x داریم $u(x,y) = x^۳ - ۴xy - ۳xy^۲ + h(y)$. طبق معادلات کشی-ریمان ($u_x = v_y$، $u_y = -v_x$) داریم

$$v_y = ۳x^۲ - ۴y - ۳y^۲$$
$$v_x = ۴x + ۶xy - h'(y).$$

با انتگرال‌گیری از معادله‌ی اول نسبت به y داریم $v(x,y) = ۳x^۲y - ۲y^۲ - y^۳ + k(x)$. با مشتق‌گیری از معادله‌ی اخیر نسبت به x و مقایسه‌ی آن با معادله‌ی دوم داریم

$$۴x + ۶xy - h'(y) = ۶xy + k'(x).$$

پس $h'(y) = ۴x - k'(x)$. چون سمت چپ رابطه‌ی اخیر تابعی از y و سمت راست آن تابعی از x است، پس این رابطه مقدار ثابتی است، یعنی $۴x - k'(x) = c_۱$ و $h'(y) = c_۱$. در نتیجه $k(x) = ۲x^۲ - c_۱x$ و $h(y) = c_۱y + c_۳$. از این رو

$$u(x,y) = x^۳ - ۴xy - ۳xy^۲ + c_۱y + c_۳$$
$$v(x,y) = ۳x^۲y - ۲y^۲ - y^۳ + ۲x^۲ - c_۱x + c_۲. \quad \blacksquare$$

مثال ۴۷. *فرض کنید $f(z) = u + iv$ تابعی تحلیلی در دامنه‌ی D باشد به طوری که* $u - v = e^x(\cos y - \sin y)$. *ضابطه‌ی تابع $f(z)$ چیست؟*

حل چون $f = u + iv$ و $if = -v + iu$ داریم $(۱+i)f = u - v + i(u+v)$ و در نتیجه $\operatorname{Re}(۱+i)f(z) = u - v$. فرض کنید $(۱+i)f(z) = U + iV$. در این صورت $U = u - v = e^x(\cos y - \sin y)$ و داریم $U_x = e^x(\cos y - \sin y)$ و $U_y = -e^x(\sin y + \cos y)$. در نتیجه طبق معادلات کشی-ریمان ($U_x = V_y$ و $U_y = -V_x$) داریم

$$\begin{cases} V_y = e^x(\cos y - \sin y) \\ V_x = e^x(\sin y + \cos y). \end{cases}$$

با انتگرال‌گیری از معادله‌ی دوم نسبت به x داریم $V(x,y) = e^x(\sin y + \cos y) + h(y)$. اکنون با مشتق‌گیری از $V(x,y)$ نسبت به y و مقایسه‌ی آن با معادله‌ی اول خواهیم داشت $e^x(\cos y - \sin y) + h'(y) = e^x(\cos y - \sin y)$. بنابراین

$h'(y) = ۰$ و در نتیجه $h(y) = c$. از این‌رو $V(x,y) = e^x(\sin y + \cos y) + c$. در نتیجه

$$\begin{aligned}(۱+i)f(z) &= U + iV\\ &= e^x(\cos y - \sin y) + ie^x(\sin y + \cos y) + ic\\ &= e^x(\cos y + i\sin y) + ie^x(\cos y + i\sin y) + ic\\ &= e^z + ie^z + ic\\ &= (۱+i)e^z + ic.\end{aligned}$$

در نتیجه $f(z) = e^z + \frac{ic}{۱+i}$. با استفاده از حل دستگاه

$$\begin{cases} u - v = e^x(\cos y - \sin y)\\ u + v = e^x(\sin y + \cos y) + c\end{cases}$$

نیز می‌توان u و v را به دست آورد. در این صورت داریم

$$u = \frac{۱}{۲}e^x\cos y + \frac{۱}{۲}c, \quad v = \frac{۱}{۲}e^x\sin y + \frac{۱}{۲}c. \quad \blacksquare$$

مثال ۴۸. *نشان دهید که اگر تابع $f(z) = u + iv$ در دامنه‌ی D تحلیلی باشد، آن‌گاه $e^u\sin v$ و $e^u\cos v$ در D همساز هستند.*

حل چون ترکیب توابع تحلیلی مجدداً تحلیلی است، $e^{f(z)} = e^u(\cos v + i\sin v)$ در دامنه‌ی D تحلیلی است. در نتیجه قسمت‌های حقیقی و موهومی آن یعنی $e^u\cos v$ و $e^u\sin v$ در D همساز هستند. $\blacksquare$

مثال ۴۹. *نشان دهید که اگر تابع $f(z) = u + iv$ در دامنه‌ی D تحلیلی باشد، آن‌گاه $e^{u_x}\cos(u_y)$ در D همساز است.*

حل چون تابع $f(z)$ در دامنه‌ی D تحلیلی است، $f'(z) = f_x = u_x + iv_x$ نیز در D تحلیلی است. در نتیجه $e^{f'(z)} = e^{u_x}(\cos v_x + i\sin v_x)$ در D تحلیلی است. از این رو قسمت حقیقی آن، یعنی $e^{u_x}\cos v_x$ در D تحلیلی است. طبق معادلات کشی-ریمان داریم $v_x = -u_y$. پس $e^{u_x}\cos v_x = e^{u_x}\cos(-u_y) = e^{u_x}\cos u_y$ در D همساز است. $\blacksquare$

مثال ۵۰. *نشان دهید که اگر تابع $f(z) = u + iv$ در دامنه‌ی D تحلیلی باشد، آن‌گاه $\cos(u_x)\sinh(u_y)$ در D همساز است.*

حل چون تابع $f(z)$ در D تحلیلی است، $f'(z) = -if_y$ و در نتیجه $if'(z) = f_y = u_y + iv_y$ نیز در D تحلیلی است. از این‌رو $e^{if'(z)} = e^{u_y}(\cos v_y + i\sin v_y)$ در D تحلیلی است. پس قسمت حقیقی آن، یعنی $e^{u_y}\cos v_y$ در D همساز است. چون $v_y = u_x$، پس $e^{u_y}\cos u_x$ در D همساز است. به همین صورت چون $-if'(z) = -f_y = -u_y - iv_y$ در D همساز است، قسمت حقیقی آن، یعنی $e^{-u_y}\cos v_y$ در D همساز است. چون $v_y = u_x$، $e^{-u_y}\cos u_x$ در D همساز است. در نتیجه $\cos u_x \sinh u_y = \frac{۱}{۲}e^{u_y}\cos u_x - \frac{۱}{۲}e^{-u_y}\cos u_x$ در D همساز است. $\blacksquare$

اکنون می‌خواهیم معادله‌ی لاپلاس را در مختصات قطبی بیابیم. فرض کنید که تابع $f(z) = u + iv$ در دامنه‌ی D تحلیلی باشد. در این صورت u و v در D در معادلات لاپلاس صدق می‌کنند، یعنی $u_{xx} + u_{yy} = ۰$ و $v_{xx} + v_{yy} = ۰$. اگر

$z = re^{i\theta}$ داریم

$$f_{rr} = \frac{\partial}{\partial r}(e^{i\theta} f'(z)) = e^{i\theta}[e^{i\theta} f''(z)] = e^{۲i\theta} f''(z)$$

و هم‌چنین

$$\begin{aligned} f_{\theta\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}(ire^{i\theta} f'(z)) \\ &= ire^{i\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(f'(z)) + i^{۲}re^{i\theta} f'(z) \\ &= ire^{i\theta}[ire^{i\theta} f''(z)] - re^{i\theta} f'(z) \\ &= -r^{۲}e^{۲i\theta} f''(z) - rf_r \\ &= -r^{۲} f_{rr} - rf_r. \end{aligned}$$

بنابراین

$$r^{۲} f_{rr} + rf_r + f_{\theta\theta} = ۰.$$

از این‌رو معادلات لاپلاس برای u و v در مختصات قطبی به صورت $r^{۲}u_{rr} + ru_r + u_{\theta\theta} = ۰$ و $r^{۲}v_{rr} + rv_r + v_{\theta\theta} = ۰$ هستند.

مثال ۵۱. *مزدوج همساز $u(r,\theta) = \ln r$ را (در صورت وجود) بیابید.*

حل چون $u_r = \frac{۱}{r}$، $u_{rr} = -\frac{۱}{r^{۲}}$ و $u_{\theta\theta} = ۰$ داریم $r^{۲}u_{rr} + ru_r + u_{\theta\theta} = ۰$. بنابراین u همساز است. در نتیجه تابع $v = v(r,\theta)$ وجود دارد که $u_\theta = -rv_r$ و $v_\theta = ru_r$. از این‌رو

$$\begin{cases} -rv_r = ۰ \\ v_\theta = r\frac{۱}{r}. \end{cases}$$

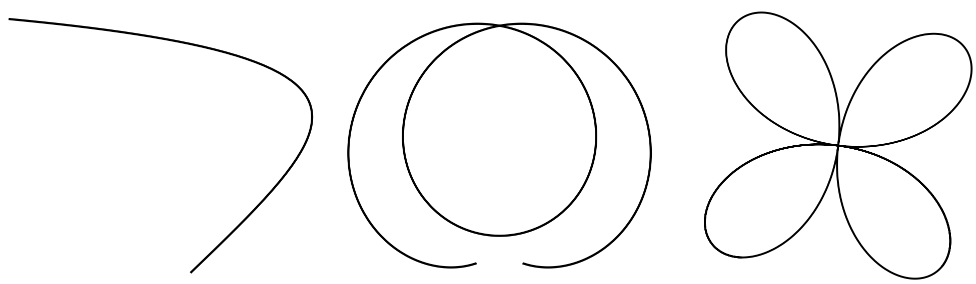
معادله‌ی اول نتیجه می‌دهد که $v(r,\theta) = h(\theta)$. با مشتق‌گیری از $v(r,\theta)$ نسبت به θ و مقایسه‌ی آن با معادله‌ی دوم داریم $h'(\theta) = ۱$. در نتیجه $h(\theta) = \theta + c$ و $v(r,\theta) = \theta + c$. ■

خلاصه فصل ۷، انتگرال توابع مختلط
جلسه سیزدهم ۱۴ مرداد ۱۳۹۳

یک منحنی C مجموعه‌ای از نقاط $z=(x,y)$ در صفحه‌ی مختلط است که

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b$$

که در آن $x=x(t)$ و $y=y(t)$ توابع پیوسته‌ای هستند. منحنی C را می‌توان با تابع $z(t)=x(t)+iy(t)$، $a\leq t\leq b$، نشان داد. معادله‌ی بالا را معادله‌ی پارامتری C می‌نامیم. چون $x(t)$ و $y(t)$ پیوسته هستند، $z(t)$ نیز پیوسته است. منحنی C را ساده گوییم هر گاه خودش را قطع نکند، یعنی $z(t)$ تابع یک به یک باشد. اگر $z(a)=z(b)$ و C برای $a<t<b$ منحنی ساده باشد، گوییم C یک منحنی بسته‌ی ساده است. هر منحنی به طور طبیعی دارای یک جهت است. جهت مثبت را در خلاف عقربه‌های ساعت در نظر می‌گیریم. منحنی را می‌توان مسیر حرکت یک ذره‌ی متحرک تصور کرد که در لحظه‌ی $t=a$ در مکان $z(a)=x(a)+iy(a)$ قرار دارد و پس از آن شروع به حرکت نموده و در لحظه‌ی پایانی، یعنی $t=b$ به مکان $z(b)=x(b)+iy(b)$ می‌رسد. منحنی C را هموار گوییم هرگاه $z'(t)=x'(t)+iy'(t)$ در $a<t<b$ موجود و پیوسته باشد (در نقاط انتهایی $t=a$ و $t=b$، مشتقات، به ترتیب، مشتق راست و چپ هستند) و علاوه بر آن $z'(t)\neq 0$، $a<t<b$. منحنی C را تکه‌ای هموار گوییم، هرگاه متشکل از تعدادی منحنی هموار باشد که انتهای هر یک به ابتدای دیگری وصل است. به طور دقیق‌تر C تکه‌ای هموار است هرگاه افراز $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ از $[a,b]$ وجود داشته باشد که C در هر یک از زیرفاصله‌های $[t_{k-1},t_k]$، $k=1,2,\ldots,n$، هموار باشد.



شکل ۹: چند منحنی

از حساب دیفرانسیل و انتگرال یادآوری می‌کنیم که طول یک منحنی C با معادله پارامتری $z(t)=x(t)+iy(t)$، $a\leq t\leq b$، از فرمول زیر به دست می‌آید

$$L=\int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt=\int_a^b |z'(t)|\,dt.$$

فرض کنید C_1 و C_2 دو منحنی باشند به طوری که انتهای C_1 و ابتدای C_2 بر هم منطبق باشند. اجتماع C_1 و C_2 را با C_1+C_2 نشان می‌دهیم. در واقع اگر $z_1(t)=x_1(t)+iy_1(t)$، $a\leq t\leq b$ معادله‌ی پارامتری منحنی C_1 و $z_2(t)=x_2(t)+iy_2(t)$، $b\leq t\leq c$ معادله‌ی پارامتری منحنی C_2 باشند که $z_1(b)=z_2(b)$، آن‌گاه معادله‌ی پارامتری

منحنی $C_۱ + C_۲$ عبارت است از

$$z(t) = \begin{cases} z_۱(t), & a \leq t \leq b \\ z_۲(t), & b \leq t \leq c. \end{cases}$$

اگر C یک منحنی باشد منحنی $-C$ همان منحنی C با جهت مخالف است. در واقع اگر $z(t) = x(t) + iy(t)$، $a \leq t \leq b$ معادله‌ی پارامتری C باشد معادله پارامتری $-C$ عبارت است از $w(t) = z(a+b-t)$، $a \leq t \leq b$.

تعریف ۵۲. *فرض کنید تابع $f(z)$ روی منحنی تکه‌ای هموار C پیوسته باشد. در این صورت انتگرال خطی f در طول C عبارت است از*

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt,$$

که در آن $z(t)$، $a \leq t \leq b$ یک معادله‌ی پارامتری دلخواه برای C است.

متذکر می‌شویم که به طور کلی‌تر اگر $f(z)$ روی منحنی C تعریف شده باشد (شرط پیوستگی $f(z)$ روی C را در نظر نمی‌گیریم)، انتگرال $f(z)$ در طول C را می‌توان تعریف کرد. این تعریف با استفاده از حد یک مجموع ریمان انجام می‌شود و در حالت پیوستگی $f(z)$ روی C این تعریف با تعریف ارائه شده در بالا معادل است. چون در این درس غالباً با توابع پیوسته سر و کار داریم تعریف بالا برای منظور ما کفایت می‌کند.

قضیه ۵۳. *اگر توابع $f(z)$ و $g(z)$ روی منحنی تکه‌ای هموار C پیوسته باشند، آن‌گاه*

$$\int_C [f(z) + g(z)]\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz$$

$$\int_C kf(z)\,dz = k\int_C f(z)\,dz, \qquad k \in \mathbb{C}$$

$$\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz.$$

هم‌چنین اگر $f(z)$ روی منحنی‌های $C_۱$ و $C_۲$ پیوسته بوده و ابتدای $C_۲$ بر انتهای $C_۱$ منطبق باشد، آن‌گاه

$$\int_{C_۱+C_۲} f(z)\,dz = \int_{C_۱} f(z)\,dz + \int_{C_۲} f(z)\,dz. \quad \blacksquare$$

چند مثال

قبل از محاسبه‌ی انتگرال خطی تعدادی تابع، معادله‌ی پارامتری دایره و خط را می‌آوریم.

مثال ۵۴. *معادله‌ی $z(t) = R\cos t + iR\sin t = Re^{it}$، $۰ \leq t \leq ۲\pi$، معادله‌ی پارامتری دایره‌ی $|z| = R$ به مرکز مبدا و شعاع R است.* $\blacksquare$

اکنون معادله‌ی پارامتری پاره‌خطی که نقطه‌ی $z_۱$ را به نقطه‌ی $z_۲$ وصل می‌کند را می‌یابیم. اگر z نقطه‌ی دلخواهی روی خط باشد عدد حقیقی t وجود دارد که $z - z_۱ = t(z_۲ - z_۱)$. بنابراین $z = z_۱ + t(z_۲ - z_۱)$. در نتیجه

$$z(t) = z_۱ + t(z_۲ - z_۱), \qquad ۰ \leq t \leq ۱.$$

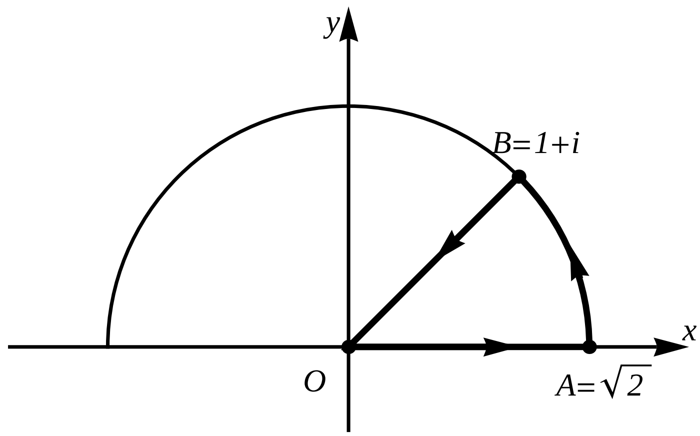
توجه کنید جهت این پاره خط از $z_۱$ به $z_۲$ است زیرا $z_۱ = z(۰)$ و $z_۲ = z(۱)$. به جای $۰ \leq t \leq ۱$ می‌توان فاصله‌ی دیگری مثل $a \leq t \leq a+۱$ را در نظر گرفت: در این حالت می‌توان نوشت

$$z(t) = z_۱ + (t-a)(z_۲ - z_۱), \quad a \leq t \leq a+۱.$$

مثال ۵۵. *معادله‌ی خط شکسته که نقاط $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$، و $z_۴$ را، به ترتیب، به هم وصل می‌کند عبارت است از*

$$z(t) = \begin{cases} z_۱ + t(z_۲ - z_۱) & ۰ \leq t \leq ۱ \\ z_۲ + (t-۱)(z_۳ - z_۲) & ۱ \leq t \leq ۲ \\ z_۳ + (t-۲)(z_۴ - z_۳) & ۲ \leq t \leq ۳. \quad \blacksquare \end{cases}$$

مثال ۵۶. *مطلوبست محاسبه‌ی انتگرال $\int_C \operatorname{Re} z \, dz$، که در آن C منحنی نشان داده در شکل ۱۰ است. (AB قسمتی از دایره به شعاع $\sqrt{۲}$ به مرکز مبدا است.)*



شکل ۱۰: منحنی مثال ۵۶

حل داریم $A = (\sqrt{۲}, ۰)$ و $B = (۱, ۱)$. منحنی C جمع سه منحنی هموار است، $C = OA + AB + BO$، که معادله‌ی پارامتری آن‌ها را می‌یابیم. پاره خط OA پاره خط واصل بین نقاط $O = ۰$ و $A = \sqrt{۲}$ است و معادله‌ی پارامتری آن عبارت است از

$$OA: \quad z(t) = t, \;\; ۰ \leq t \leq \sqrt{۲}.$$

بنابراین انتگرال در طول OA عبارت است از

$$\int_{OA} \operatorname{Re} z \, dz = \int_۰^{\sqrt{۲}} t \, dt = \frac{t^۲}{۲}\Big]_۰^{\sqrt{۲}} = ۱.$$

قطاع AB قسمتی از دایره‌ی $|z| = \sqrt{۲}$ از نقطه‌ی $A = \sqrt{۲}$ تا نقطه‌ی $B = ۱ + i$ است، پس معادله‌ی پارامتری آن عبارت است از

$$AB: \quad z(t) = \sqrt{۲} e^{it}, \;\; ۰ \leq t \leq \frac{\pi}{۴}.$$

بنابراین انتگرال در طول AB عبارت است از

$$\begin{aligned}\int_{AB}\operatorname{Re} z\,dz &= \int_{\circ}^{\pi/۴}\sqrt{۲}\cos t\, i\sqrt{۲}e^{it}\,dt\\ &= ۲i\int_{\circ}^{\pi/۴}\frac{e^{it}+e^{-it}}{۲}e^{it}\,dt\\ &= i\int_{\circ}^{\pi/۴}(e^{۲it}+۱)\,dt\\ &= \left[\frac{۱}{۲}e^{۲it}+it\right]_{\circ}^{\pi/۴}\\ &= \frac{۱}{۲}i+i\frac{\pi}{۴}-\frac{۱}{۲}\end{aligned}$$

در نهایت پاره خط BO پاره خط واصل بین نقاط $B=۱+i$ و $O=\circ$ است و معادله‌ی پارامتری آن عبارت است از

$$\begin{aligned}BO:\quad z(t)&=(۱+i)+t(\circ-(۱+i)),\quad \circ\le t\le ۱\\ &=(۱+i)(۱-t),\quad \circ\le t\le ۱.\end{aligned}$$

بنابراین انتگرال در طول BO عبارت است از

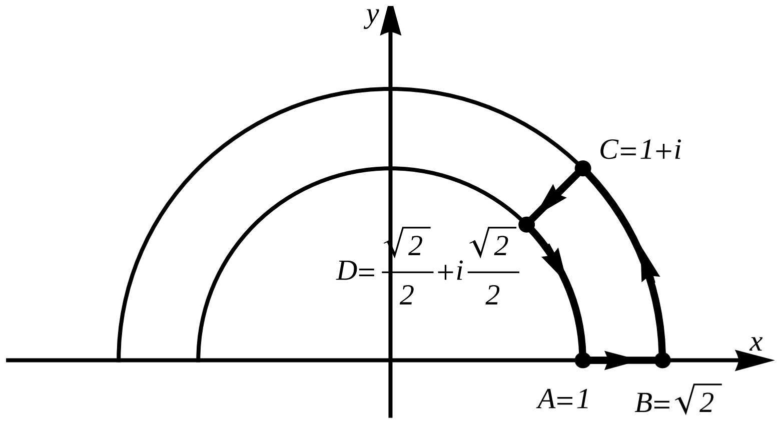
$$\int_{BO}\operatorname{Re} z\,dz=\int_{\circ}^{۱}(۱-t)(-(۱+i))\,dt=-\int_{\circ}^{۱}dt=-\frac{۱}{۲}-i\frac{۱}{۲}.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\int_{C}\operatorname{Re} z\,dz &= \left(\int_{OA}+\int_{AB}+\int_{BO}\right)f(z)\,dz\\ &= ۱+\left(\frac{۱}{۲}i+i\frac{\pi}{۴}-\frac{۱}{۲}\right)+\left(-\frac{۱}{۲}-i\frac{۱}{۲}\right)\\ &= i\frac{\pi}{۴}.\quad \blacksquare\end{aligned}$$

مثال ۵۷. *مطلوبست محاسبه‌ی انتگرال* $\int_{\Gamma} f(z)\,dz$ *، که در آن* $f(z)=\frac{\bar{z}}{z}$ *و* Γ *منحنی نشان داده شده در شکل ۱۱ است. (*DA *و* BC *به ترتیب قسمتی از دایره‌های به شعاع ۱ و* $\sqrt{۲}$ *به مرکز مبدا هستند.)*

حل منحنی Γ جمع چهار منحنی هموار است، $\Gamma=AB+BC+CD+DA$، که معادله‌ی پارامتری آن‌ها را می‌یابیم



شکل ۱۱: منحنی Γ در مثال ۵۷

(قرار می‌دهیم $k=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$)

$$\begin{aligned}
AB: \quad & z(t)=t, \ \ ۱\le t\le \sqrt{۲}\\
BC: \quad & z(t)=\sqrt{۲}e^{it}, \ \ ۰\le t\le \frac{\pi}{۴}\\
CD: \quad & z(t)=(۱+i)+t((k+ik)-(۱+i)), \ \ ۰\le t\le ۱\\
& \quad =(۱+i)+t(۱+i)(k-۱), \ \ ۰\le t\le ۱\\
& \quad =(۱+i)(۱+t(k-۱)), \ \ ۰\le t\le ۱\\
DA: \quad & z(t)=e^{(\pi/۴-t)i}, \ \ ۰\le t\le \frac{\pi}{۴}
\end{aligned}$$

و انتگرال در طول هر یک از این منحنی‌ها را محاسبه می‌کنیم. انتگرال $f(z)$ در طول AB، عبارت است از

$$\int_{AB} f(z)\,dz=\int_{۱}^{\sqrt{۲}} dt=\sqrt{۲}-۱$$

و انتگرال $f(z)$ در طول BC، برابر است با

$$\begin{aligned}
\int_{BC} f(z)\,dz &= \int_{۰}^{\pi/۴}\frac{\sqrt{۲}e^{-it}}{\sqrt{۲}e^{it}}(i\sqrt{۲}e^{it})\,dt=-\sqrt{۲}e^{-it}\Big]_{۰}^{\pi/۴}\\
&= -\sqrt{۲}(e^{-i\pi/۴}-۱).
\end{aligned}$$

انتگرال $f(z)$ در طول CD، عبارت است از

$$\begin{aligned}
\int_{CD} f(z)\,dz &= \int_{۰}^{۱}\frac{(۱-i)(۱+t(k-۱))}{(۱+i)(۱+t(k-۱))}(۱+i)(k-۱)\,dt\\
&= \int_{۰}^{۱}(۱-i)(k-۱)\,dt\\
&= (۱-i)(k-۱).
\end{aligned}$$

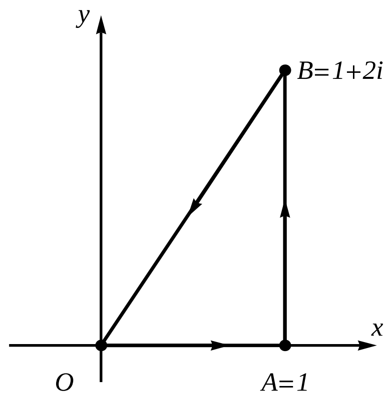
در نهایت انتگرال $f(z)$ در طول DA، برابر است با

$$\begin{aligned}\int_{DA} f(z)\,dz &= \int_{۰}^{\pi/۴} \frac{e^{-(\pi/۴-t)i}}{e^{(\pi/۴-t)i}}(-ie^{(\pi/۴-t)i})\,dt = -e^{-(\pi/۴-t)i}\Big]_{۰}^{\pi/۴}\\ &= -۱+e^{-i\pi/۴}.\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \left(\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}+\int_{DA}\right) f(z)\,dz\\ &= (\sqrt{۲}-۱)-\sqrt{۲}(e^{-i\pi/۴}-۱)+(۱-i)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-۱\right)+(-۱+e^{-i\pi/۴}). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

مثال ۵۸. *انتگرال* $\int_C \cos z\,dz$ *را بیابید، که درآن منحنی* C *مثلث با رئوس* $O=۰$، $A=۱$، و $B=۱+۲i$ *است (شکل ۱۲ راببینید).*



شکل ۱۲: مثلث C در مثال ۵۹

حل منحنی C جمع سه منحنی هموار است، یعنی $C=OA+AB+BO$، که معادله‌ی پارامتری آن‌ها را می‌یابیم

$$\begin{aligned} OA:&\quad z(t)=t,\quad ۰\le t\le ۱\\ AB:&\quad z(t)=۱+۲it,\quad ۰\le t\le ۱\\ BO:&\quad z(t)=(۱+۲i)-t(۱+۲i),\quad ۰\le t\le ۱\\ &\quad =(۱+۲i)(۱-t)\end{aligned}$$

و انتگرال در طول هر یک از این منحنی‌ها را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}\int_{OA}\cos z\,dz &= \int_{۰}^{۱}\cos t\,dt=\sin t\Big]_{۰}^{۱}=\sin(۱)\\ \int_{AB}\cos z\,dz &= \int_{۰}^{۱}\cos(۱+۲it)(۲i)\,dt=\sin(۱+۲it)\Big]_{۰}^{۱}=\sin(۱+۲i)-\sin(۱)\\ \int_{BO}\cos z\,dz &= \int_{۰}^{۱}\cos((۱+۲i)(۱-t))(-(۱+۲i))\,dt=\sin((۱+۲i)(۱-t))\Big]_{۰}^{۱}\\ &= -\sin(۱+۲i).\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\int_C \cos z\,dz &= \left(\int_{OA}+\int_{AB}+\int_{BO}\right)\cos z\,dz\\ &= \sin(۱)+(\sin(۱+۲i)-\sin(۱))-\sin(۱+۲i)\\ &= ۰. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

در مثال بالا مقدار انتگرال برابر صفر شد. این مطلب تصادفی نیست. در واقع اگر تابع $f(z)$ در داخل و روی منحنی بسته و سادهی C تحلیلی باشد، آنگاه $\int_C f(z)\,dz=۰$. این مطلب یکی از مهمترین قضیههای آنالیز مختلط موسوم به قضیهی کشی است.

مثال ۵۹. *انتگرال $\int_C \frac{\mathrm{Ln}(i\,\overline{z})}{z}\,dz$ را بیابید، که درآن منحنی C نیمدایرهی بالایی $x^۲+y^۲=۴$، $y\geq ۰$، است.*

حل منحنی C دارای معادلهی $|z|=۲$ است و معادلهی پارامتری C برابر $C:\quad z(t)=۲e^{it}$، $۰\leq t\leq \pi$، است. چون روی C داریم

$$\mathrm{Ln}(i\,\overline{z})=\ln|i\,\overline{z}|+i\mathrm{Arg}(i\,\overline{z})=\ln|z|+i\mathrm{Arg}(۲ie^{-it})=\ln ۲+i\mathrm{Arg}(۲e^{i(-t+\pi/۲)})=\ln ۲+i(-t+\pi/۲)$$

(توجه کنید که چون $۰\leq t\leq\pi$ نتیجه میگیریم $-\frac{\pi}{۲}\leq -t+\frac{\pi}{۲}\leq\frac{\pi}{۲}$ و در نتیجه $\mathrm{Arg}(۲e^{i(-t+\pi/۲)})=-t+\pi/۲$).

پس

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\mathrm{Ln}(i\,\overline{z})}{z}\,dz &= \int_C \frac{\ln|z|+i\mathrm{Arg}(i\,\overline{z})}{z}\,dz\\ &= \int_۰^\pi \frac{\ln ۲+i(-t+\pi/۲)}{۲e^{it}}(۲ie^{it})\,dt\\ &= i\int_۰^\pi(\ln ۲-it+i\pi/۲)\,dt\\ &= i\left[t\ln ۲-i\frac{t^۲}{۲}+it\frac{\pi}{۲}\right]_۰^\pi\\ &= i\left(\pi\ln ۲-i\frac{\pi^۲}{۲}+i\frac{\pi^۲}{۲}\right)\\ &= i\pi\ln ۲\end{aligned}$$

خلاصه فصل ۷ (بخش دوم)، انتگرال توابع مختلط

جلسه چهاردهم ۱۹ مرداد ۱۳۹۳

قضیه ۶۰. *(قضیه‌ی کشی) اگر تابع $f(z)$ در داخل و روی منحنی بسته و ساده‌ی C تحلیلی باشد، آن‌گاه*

$$\int_C f(z)\,dz = ۰.$$

قضیه ۶۱. *فرض کنید $f(z)$ روی منحنی تکه‌ای هموار C به طول L پیوسته باشد و عدد M وجود داشته باشد به طوری که $|f(z)| \le M$، برای هر $z \in C$. در این صورت*

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le ML.$$

اثبات. فرض کنید $z = z(t)$، $a \le t \le b$ یک معادله‌ی پارامتری برای C باشد. چون طول C برابر L است، داریم

$$\begin{aligned}\left|\int_C f(z)\,dz\right| &= \left|\int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt\right| \\ &\le \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|\,dt \\ &\le M\int_a^b |z'(t)|\,dt \\ &= ML. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

قضیه ۶۲. *فرض کنید تابع $f(z)$ در داخل و روی منحنی بسته‌ی ساده‌ی C تحلیلی باشد. اگر $z_۰$ نقطه‌ای در داخل C باشد، آن‌گاه*

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_۰)^{n+۱}}\,dz = \frac{۲\pi i}{n!} f^{(n)}(z_۰).$$

با فرض $n = ۰$ در قضیه‌ی بالا داریم

قضیه ۶۳. *(فرمول انتگرال کشی) فرض کنید تابع $f(z)$ در داخل و روی منحنی بسته‌ی ساده‌ی C تحلیلی باشد. اگر $z_۰$ نقطه‌ای در داخل C باشد، آن‌گاه*

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_۰}\,dz = ۲\pi i f(z_۰).$$

نتیجه ۶۴. *(نامساوی کشی) فرض کنید منحنی C دایره‌ی $|z-z_۰| = r$ باشد، و $|f(z)| \le M$ به ازای هر $z \in C$. در این صورت*

$$\left|f^{(n)}(z_۰)\right| \le \frac{n!M}{r^n}.$$

اثبات. با استفاده از فرمول انتگرال کشی داریم

$$\left|f^{(n)}(z_۰)\right| = \frac{n!}{۲\pi}\left|\int_C \frac{f(z)}{(z-z_۰)^{n+۱}}\,dz\right| \le \frac{n!}{۲\pi} M \frac{۱}{r^{n+۱}} \times ۲\pi r = \frac{n!M}{r^n}$$

که حکم را ثابت می‌کند. $\blacksquare$

نتیجه‌ی بعدی نشان می‌دهد که هر تابع تام و کران‌دار تابعی ثابت است.

نتیجه ۶۵. (قضیه‌ی لیوویل) فرض کنید تابع $f(z)$ در همه‌ی صفحه‌ی مختلط تحلیلی باشد، یعنی $f(z)$ تابع تام باشد. اگر $f(z)$ در $\mathbb{C}$ دارای ماکسیمم مطلق باشد، یعنی به ازای هر $z \in \mathbb{C}$، $|f(z)| \leq M$، آن‌گاه $f(z)$ تابعی ثابت است.

اثبات. طبق نامساوی کشی داریم

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{r}.$$

حال اگر $r \to +\infty$، نتیجه می‌گیریم $f'(z) = ۰$، به ازای هر $z \in \mathbb{C}$. در نتیجه $f(z)$ تابعی ثابت است. ■

چند مثال

مثال ۶۶. (آ) تابع $\frac{z^۲+۱}{z-۲i}$ تنها در $z = ۲i$، تحلیلی نیست. چون $۲i$ در داخل و روی دایره‌ی $|z| = ۱$ نیست، طبق قضیه‌ی کشی داریم $\int_{|z|=۱} \frac{z^۲+۱}{z-۲i}\, dz = ۰$.

(ب) تابع $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ تنها در ریشه‌های مخرج کسر یعنی در جایی که $\cos z = ۰$ تحلیلی نیست. بنابراین $\tan z$ فقط در نقاط $z = \frac{۲n-۱}{۲}\pi$، $n = ۰, \pm۱, \pm۲, \ldots$، تحلیلی نیست. چون هیچ کدام از این نقاط در داخل و روی دایره‌ی $|z| = ۱$ نیستند، طبق قضیه‌ی کشی داریم $\int_{|z|=۱} \tan z\, dz = ۰$.

(پ) تابع $\operatorname{Ln}(z+۲)$ تنها در نقاطی که $\operatorname{Im}(z+۲) = ۰$ و $\operatorname{Re}(z+۲) \leq ۰$ تحلیلی نیست. اگر $z = x+iy$، آن‌گاه $z+۲ = x+۲+iy$ و در نتیجه $\operatorname{Ln}(z+۲)$ تنها در نقاطی که $y = ۰$، $x+۲ \leq ۰$ تحلیلی نیست. چون هیچ کدام از این نقاط در داخل و روی دایره‌ی $|z| = ۱$ نیستند، طبق قضیه‌ی کشی داریم $\int_{|z|=۱} \operatorname{Ln}(z+۲)\, dz = ۰$. ■

مثال ۶۷. کران بالا برای $\left|\int_{|z|=۲} e^{\operatorname{Re} z}\, dz\right|$ را بیابید.

حل یک معادله‌ی پارامتری برای منحنی C عبارت است از $z(t) = ۲\cos t + ۲\sin t$، $۰ \leq t \leq ۲\pi$. طول منحنی C برابر $L = ۴\pi$ است. ماکسیمم $|e^{\operatorname{Re} z}|$ روی C را می‌یابیم. چون $e^{\operatorname{Re} z} = e^{۲\cos t}$ داریم $|e^{\operatorname{Re} z}| = e^{۲\cos t} \leq e^۲$. بنابراین طبق قضیه‌ی قبل داریم

$$\left|\int_C e^{\operatorname{Re} z}\, dz\right| \leq ML = ۴\pi e^۲. \quad ■$$

مثال ۶۸. نشان دهید $\lim_{R\to+\infty} \int_{|z|=R} \frac{\operatorname{Ln} z}{z^۲}\, dz = ۰$، که درآن Ln شاخه‌ی اصلی لگارینم طبیعی است.

حل ابتدا ماکسیمم $\left|\frac{\operatorname{Ln} z}{z^{۲}}\right|$ را روی منحنی $|z| = R$ $(R > ۱)$ می‌یابیم. داریم

$$\begin{aligned}\left|\frac{\operatorname{Ln} z}{z^{۲}}\right| &= \frac{|\operatorname{Ln} z|}{|z^{۲}|}\\ &= \frac{|\ln|z| + i\operatorname{Arg} z|}{|z|^{۲}}\\ &\leq \frac{\ln|z| + |\operatorname{Arg} z|}{|z|^{۲}}\\ &= \frac{\ln R + \pi}{R^{۲}}. \qquad (|z| = R)\end{aligned}$$

اکنون داریم

$$\left|\int_C \frac{\operatorname{Ln} z}{z^{۲}}\,dz\right| \leq ML = \frac{\ln R + \pi}{R^{۲}} ۲\pi R = ۲\pi\frac{\ln R + \pi}{R}.$$

چون وقتی $R \to +\infty$ طرف راست عبارت بالا به صفر میل می‌کند، پس طرف چپ نیز به صفر میل می‌کند و از آنجا حکم ثابت می‌شود. ■

مثال ۶۹. *انتگرال*

$$\int_{|z|=\frac{۱}{۳}} \frac{\operatorname{Ln}(۱ - z^{۲})}{z(z^{۳} - i)(\tan z - i)}\,dz$$

را محاسبه کنید، که در آن Ln *شاخه‌ی اصلی لگاریتم طبیعی است.*

حل تابع Ln فقط در مجموعه‌ی $\{z \mid \operatorname{Re} z \leq ۰, \quad \operatorname{Im} z = ۰\}$ تحلیلی نیست. چون داریم

$$۱ - z^{۲} = ۱ - (x + iy)^{۲} = ۱ - x^{۲} + y^{۲} - ۲ixy$$

پس تابع $\operatorname{Ln}(۱ - z^{۲})$ فقط برای

$$\begin{cases} ۱ - x^{۲} + y^{۲} \leq ۰\\ ۲xy = ۰\end{cases}$$

تحلیلی نیست. از معادله‌ی دوم داریم $x = ۰$ یا $y = ۰$. اگر $x = ۰$، آن‌گاه از معادله‌ی اول نتیجه می‌شود $۱ + y^{۲} \leq ۰$ که امکان ندارد. پس $y = ۰$ و از معادله‌ی اول داریم $۱ - x^{۲} \leq ۰$ که نتیجه می‌دهد $|x| \geq ۱$. در نتیجه $\operatorname{Ln}(۱ - z^{۲})$ فقط روی مجموعه‌ی $\{z \mid z = x + iy, \quad y = ۰, \quad |x| \geq ۱\}$ تحلیلی نیست.

اگر $z^{۳} - i = ۰$، آن‌گاه $|z^{۳}| = |i|$ و در نتیجه $|z| = ۱$. بنابراین ریشه‌های $z^{۳} - i = ۰$ دارای قدرمطلق واحد هستند و هیچ‌کدام در داخل یا روی دایره‌ی $|z| = \frac{۱}{۳}$ قرار ندارند.

اکنون ریشه‌های معادله‌ی $\tan z - i = ۰$ را می‌یابیم. اگر $\tan z - i = ۰$ داریم $\sin z - i\cos z = ۰$ و در نتیجه $\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{۲i} = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{۲}$. از این رو $e^{iz} = ۰$ که معادله‌ی اخیر ریشه ندارد. پس $\tan z - i = ۰$ ریشه ندارد.

پس تابع $f(z) = \frac{\operatorname{Ln}(۱ - z^{۲})}{(z^{۳} - i)(\tan z - i)}$ در داخل و روی دایره‌ی $|z| = \frac{۱}{۳}$ تحلیلی است. بنابراین طبق قضیه‌ی انتگرال کشی

$$\int_{|z|=۱/۳} \frac{\operatorname{Ln}(۱ - z^{۲})}{z(z^{۳} - i)(\tan z - i)}\,dz = \int_{|z|=۱/۳} \frac{f(z)}{z}\,dz = ۲\pi i f(۰) = ۰. \quad ■$$

مثال ۷۰. انتگرال

$$\int_{|z-i|=1/2} \frac{z^2}{z-i}\mathrm{Ln}\,\frac{z+1}{z-1}\,dz$$

را محاسبه کنید، که در آن Ln شاخه‌ی اصلی لگاریتم است.

حل تابع Ln فقط روی مجموعه‌ی $\{z \mid \mathrm{Re}\,z \leq 0, \quad \mathrm{Im}\,z = 0\}$ تحلیلی نیست. داریم

$$\begin{aligned}\frac{z+1}{z-1} &= \frac{x+1+iy}{x-1+iy}\\ &= \frac{(x+1+iy)((x-1)-iy)}{(x-1)^2+y^2}\\ &= \frac{x^2+y^2-1-2iy}{(x-1)^2+y^2}.\end{aligned}$$

روابط بالا را می‌توان به صورت زیر نیز به دست آورد:

$$\begin{aligned}\frac{z+1}{z-1} &= \frac{z+1}{z-1}\frac{\overline{z-1}}{\overline{z-1}}\\ &= \frac{(z+1)(\overline{z}-1)}{|z-1|^2}\\ &= \frac{|z|^2-(z-\overline{z})-1}{|z-1|^2}\\ &= \frac{|z|^2-1-2i\mathrm{Im}\,z}{|z-1|^2}.\end{aligned}$$

پس تابع $\mathrm{Ln}\,\frac{z+1}{z-1}$ فقط روی مجموعه‌ی

$$\begin{cases} x^2+y^2-1 \leq 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

تحلیلی نیست. از معادله‌ی دوم داریم $y = 0$ و در نتیجه از معادله‌ی اول داریم $1 - x^2 \geq 0$ که نتیجه می‌دهد $|x| \leq 1$. در نتیجه تابع $\mathrm{Ln}\,\frac{z+1}{z-1}$ فقط روی مجموعه‌ی

$$\{z \mid z = x+iy, \quad y = 0, \quad |x| \leq 1\}$$

تحلیلی نیست. پس تابع $f(z) = z^2\mathrm{Ln}\,\frac{z+1}{z-1}$ در داخل و روی دایره‌ی $|z-i| = \frac{1}{2}$ تحلیلی است. بنابراین طبق قضیه‌ی انتگرال کشی

$$\begin{aligned}\int_{|z-i|=1/2} \frac{z^2}{z-i}\mathrm{Ln}\,\frac{z+1}{z-1}\,dz &= \int_{|z-i|=1/2} \frac{f(z)}{z-i}\,dz\\ &= 2\pi i f(i)\\ &= 2\pi i\mathrm{Ln}\,\frac{i+1}{i-1}.\end{aligned}$$

اما چون

$$\frac{i+1}{i-1} = \frac{i+1}{i-1} \times \frac{-i-1}{-i-1} = \frac{-2i}{2} = -i,$$

پس جواب انتگرال مورد نظر عبارت است از

$$۲\pi i \mathrm{Ln}\,(-i) = ۲\pi i(\ln|-i| + i\mathrm{Arg}\,(-i)) = ۲\pi i\left(\ln ۱ - i\frac{\pi}{۲}\right) = \pi^۲. \quad \blacksquare$$

مثال ۷۱. *فرض کنید که f یک تابع تحلیلی در تمام صفحه‌ی مختلط باشد و برای هر $z \in \mathbb{C}$ نامساوی $|f(z)| \leq |e^z|$ برقرار باشد. اگر $f(\circ) = i$، مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید*

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-۱)^۳}\,dz$$

که در آن C یک منحنی بسته‌ی ساده شامل $z = ۱$ است.

حل چون $|f(z)| \leq |e^z|$ داریم $|e^{-z}f(z)| \leq ۱$ و در نتیجه تابع تام $e^{-z}f(z)$ یک تابع کراندار است. پس طبق قضیه‌ی لیوویل یک تابع ثابت است، یعنی عدد ثابت k وجود دارد که $e^{-z}f(z) = k$ و در نتیجه $f(z) = ke^z$. اکنون چون $f(\circ) = i$ نتیجه می‌شود $f(z) = ie^z$ حال مقدار انتگرال را محاسبه می‌کنیم. طبق قضیه‌ی انتگرال کشی داریم

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-۱)^۳}\,dz = \frac{۲\pi i}{۲!}f''(۱) = \pi i(ie) = -\pi e.$$

خلاصه فصل ۷ (قسمت اول)، سری لوران و کاربردهای آن

جلسه پانزدهم ۲۰ مرداد ۱۳۹۳

مفاهیم دنباله‌ها و سری‌های عددی و توانی حقیقی را به راحتی می‌توان تعمیم داد و مفاهیم دنباله‌ها و سری‌های عددی و توانی مختلط را تعریف کرد. عبارت

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

که در آن z_0 یک عدد مختلط ثابت است و a_nها اعداد مختلط هستند، را یک سری توانی حول z_0 نامیم. اگر سری بالا در دیسک $R: \quad |z - z_0| < r$ همگرا باشد، آن‌گاه به سادگی می‌توان دید که g از هر مرتبه‌ای در R مشتق‌پذیر است $a_n = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}$. سری بالا را سری تیلور g حول z_0 نامیم. سری تیلور حول نقطه‌ی $z_0 = 0$ را سری مک‌لورن نامیم.
یکی از مهم‌ترین سری‌های توانی (سری‌های تیلور) سری هندسی است. سری هندسی و ناحیه‌ی همگرایی آن عبارت است از

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots, \quad |z| < 1.$$

برای دیدن این مطلب می‌کنیم که چون

$$1 - z^{n+1} = (1 - z)(1 + z + z^2 + \cdots + z^n)$$

داریم

$$\frac{1}{1 - z} = \frac{1 - z^{n+1}}{1 + z + z^2 + \cdots + z^n}.$$

علاوه بر آن چون برای $|z| < 1$، $\lim_{n\to+\infty} z^{n+1} = 0$ داریم

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots, \quad |z| < 1.$$

به سادگی می‌توان دید که سری هندسی برای $|z| \geq 1$ واگرا است.

قضیه‌ی بعد بیان می‌کند که اگر تابع مختلط $f(z)$ در نقطه‌ی z_0 تحلیلی باشد، آن‌گاه مشتقات f از هر مرتبه‌ای وجود دارند و سری تیلور f در یک دیسک حول z_0 به $f(z)$ همگرا است.

قضیه ۷۲. *فرض کنید تابع $f(z)$ در داخل و روی دایره‌ی $|z - z_0| = r$ به (روی دیسک بسته‌ی $|z - z_0| \leq r$، به مرکز z_0 و شعاع r_0 تحلیلی) باشد. در این صورت به ازای هر z در داخل این دایره (یعنی به ازای هر z که $|z - z_0| < r$) داریم*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad (\text{سری تیلور حول } z_0)$$

که در آن $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. (سری تیلور حول نقطه‌ی $z_0 = 0$ را سری مک‌لورن تابع نامیم.)

توجه کنید که طبق فرمول انتگرال کشی داریم

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz,$$

که در آن C منحنی بسته‌ی ساده دلخواهی حول z_0 و واقع در دیسک $|z - z_0| < r$ است.

حال اگر تابع $f(z)$ در همه‌ی نقاط دیسک $|z-z_0|<r$ به غیر از نقطه‌ی z_0 تحلیلی باشد، آن‌گاه بسط f به صورت $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ است، یعنی توان‌های منفی نیز در بسط f ظاهر می‌شوند. در قضیه‌ی بعد a_n ها تعیین شده‌اند. در واقع در قضیه‌ی بعد بیان می‌کند که a_n از فرمول انتگرال کشی که در بالا ذکر شد تبعیت می‌کند.

قضیه ۷۳. *فرض کنید تابع $f(z)$ در طوقه‌ی $\{z \mid R_1<|z-z_0|<R_2\}$، که در آن $0\le R_1<R_2$، تحلیلی باشد. در این صورت برای هر z در این طوقه داریم*

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \\ &= \cdots+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots, \end{aligned}$$

و ضرایب a_n از رابطه‌ی زیر به دست می‌آیند

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dw, \quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots,$$

که در آن C یک منحنی دلخواه حول z_0 است که در طوقه قرار دارد. این سری را سری لوران f در طوقه‌ی $R_1<|z-z_0|<R_2$ گوییم.

چند مثال

مثال ۷۴. *با استفاده از سری هندسی عبارت‌های زیر را به صورت سری توانی حول نقطه‌ی داده شده بیابید.*

(الف) $\frac{1}{1+3z^2}$ حول $z_0=0$.

(ب) $\frac{1}{(z+2i)(z-i)}$ حول $z_0=0$.

(ج) $\frac{1}{1+z}$ حول $z_0=2i$.

حل (الف) در سری هندسی

$$\frac{1}{1-w}=\sum_{n=0}^{\infty} w^n, \qquad |w|<1$$

به جای w قرار می‌دهیم $-3z^2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+3z^2} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-3z^2)^n, \qquad |-3z^2|<1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^n z^{2n}, \qquad |z|<\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

(ب) ابتدا کسر را به کسرهای جزیی تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{1}{(z+2i)(z-i)}=\frac{i}{3(z+2i)}-\frac{i}{3(z-i)}.$$

اکنون سری توانی متناظر هر کدام از کسرها را با استفاده از فاکتور گیری و سری هندسی می‌یابیم. داریم

$$\begin{aligned}\frac{i}{3(z+2i)} &= \frac{i}{6i(1-iz/2)}\\ &= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{iz}{2}\right)^n, \qquad \left|\frac{iz}{2}\right|<1\\ &= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{2^n}z^n, \qquad |z|<2\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\frac{-i}{3(z-i)} &= \frac{-i}{-3i(1+iz)}\\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-iz)^n, \qquad |-iz|<1\\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^n z^n, \qquad |iz|<1.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z+2i)(z-i)} &= \frac{i}{3(z+2i)}-\frac{i}{3(2i+z)}\\ &= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{2^n}z^n+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^n z^n, \quad |z|<1\\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{i^n}{2^{n+1}}+(-1)^n i^n\right]z^n, \quad |z|<1.\end{aligned}$$

(ج) برای بسط تابع حول $z_0=2i$ با استفاده از سری هندسی می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+z} &= \frac{1}{1+2i+z-2i}\\ &= \frac{1}{(1+2i)\left[1+\dfrac{z-2i}{1+2i}\right]}\\ &= \frac{1}{(1+2i)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2i}{1+2i}\right)^n, \qquad \left|-\frac{z-2i}{1+2i}\right|<1\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+2i)^{n+1}}(z-2i)^n, \qquad |z-2i|<\sqrt{5}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

مثال ۷۵. *سری مک لوران توابع زیر رابیابید.*

(الف) $\dfrac{1}{(1-z)^2}$ *(ب)* $\tan^{-1} z$.

حل (الف) اگر از سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ مشتق بگیریم خواهیم داشت

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n.$$

(ب) از سری مک لوران $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \frac{1}{1+z^2}$ تابع اولیه می‌گیریم:

$$\tan^{-1} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + c.$$

با قرار دادن $z = 0$ در عبارت بالا $c = 0$ به دست می‌آید. ■

به سادگی می‌توان دید که

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \cdots, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \cdots, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \cdots, \quad z \in \mathbb{C}$$

توجه کنید در بسط‌های بالا اگر به جای z، عدد حقیقی x را قرار دهیم، بسط تیلور توابع حقیقی متناظر به دست می‌آید. در واقع اگر $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ سری تیلور تابع حقیقی $f(x)$ حول x_0 باشد و اگر تابع مختلط متناظر در $z_0 = x_0$ تحلیلی باشد، آن‌گاه سری تیلور $f(z)$ حول z_0 عبارت است از $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

مثال ۷۶. *سری مک لوران تابع e^{iz} را بیابید.*

حل (الف) اگر در بسط مک لوران $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ به جای z مقدار iz را قرار دهیم داریم

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^n.$$

(ب) از سری مک لوران $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \frac{1}{1+z^2}$ تابع اولیه می‌گیریم:

$$\tan^{-1} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + c.$$

با قرار دادن $z = 0$ در عبارت بالا $c = 0$ به دست می‌آید. ■

معمولاً سری لوران را می‌توان از سری تیلور به دست آورد. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۷۷. *سری لوران توابع زیر را حول نقطه‌ی داده شده بیابید.*

(الف) $e^{1/z}$ حول $z_0 = 0$.

(ب) $\sin(1/z)$ حول $z_0 = 0$.

(ج) $\dfrac{1}{1+z^2}$ حول $z_0 = -i$.

حل (الف) در بسط مک لوران $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$، به جای z مقدار $\frac{1}{z}$ قرار می‌دهیم.

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \cdots, \quad z \neq 0.$$

(ب) در بسط مک لوران $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$، به جای z مقدار $\frac{1}{z}$ قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{1}{z}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! z^{2n+1}} \\ &= \frac{1}{z} - \frac{1}{3! z^3} + \cdots, \quad z \neq 0.\end{aligned}$$

(ج) برای استفاده از سری هندسی به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{z+i}\,\frac{1}{z-i} \\ &= \frac{1}{z+i}\,\frac{1}{-2i+(z+i)} \\ &= \frac{1}{z+i}\,\frac{1}{-2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{2i}\right)^n, \quad 0 < \left|\frac{z+i}{2i}\right| < 1 \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^{n-1}}{(2i)^{n+1}}, \quad 0 < |z+i| < 2 \\ &= \frac{-1}{2i(z+i)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^{n-1}}{(2i)^{n+1}}, \quad 0 < |z+i| < 2. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

مثال ۷۸. *سری لوران تابع* $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$ *را در دامنه‌های زیر بیابید.*

(الف) $0 < |z-1| < 2$ (سری لوران حول $z_0 = 1$).

(ب) $0 < |z-3| < 2$ (سری لوران حول $z_0 = 3$).

(ج) $1 < |z| < 3$ (سری لوران حول $z_0 = 0$).

(د) $|z| > 3$ (سری لوران حول $z_0 = 0$).

حل (الف) برای یافتن سری لوران f حول $z_\circ$ کسر را به صورت مناسب نوشته و از سری هندسی استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{۱}{z-۱}\frac{۱}{z-۳} \\ &= \frac{۱}{z-۱}\frac{-۱}{۲-(z-۱)} \\ &= \frac{۱}{z-۱}\frac{-۱}{۲(۱-(z-۱)/۲)} \\ &= \frac{۱}{z-۱}\frac{-۱}{۲}\sum_{n=\circ}^{\infty}\left(\frac{z-۱}{۲}\right)^n, \qquad \left|\frac{z-۱}{۲}\right|<۱ \\ &= -\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{۱}{۲^{n+۱}}(z-۱)^{n-۱}, \qquad |z-۱|<۲. \end{aligned}$$

(ب) مشابه (الف) محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{۱}{z-۳}\frac{۱}{z-۱} \\ &= \frac{۱}{z-۳}\frac{۱}{۲+(z-۳)} \\ &= \frac{۱}{z-۳}\frac{۱}{۲(۱+(z-۳)/۲)} \\ &= \frac{۱}{z-۳}\frac{۱}{۲}\sum_{n=\circ}^{\infty}(-۱)^n\left(\frac{z-۳}{۲}\right)^n, \qquad \left|\frac{z-۳}{۲}\right|<۱ \\ &= \sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۲^{n+۱}}(z-۳)^{n-۱}, \qquad |z-۳|<۲. \end{aligned}$$

(ج) ابتدا $f(z)$ را به کسرهای جزیی تجزیه می‌کنیم

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{۱}{(z-۱)(z-۳)} \\ &= \frac{۱}{۲(z-۳)}-\frac{۱}{۲(z-۱)}. \end{aligned}$$

اکنون با توجه به این که می‌خواهیم رابطه‌ی $۱<|z|<۳$ برقرار باشد، با استفاده از سری هندسی به نحو مناسب سری لوران f را می‌یابیم

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{۱}{۲(z-۳)}-\frac{۱}{۲(z-۱)} \\ &= -\frac{۱}{۶}\frac{۱}{۱-z/۳}-\frac{۱}{۲z}\frac{۱}{۱-۱/z} \\ &= -\frac{۱}{۶}\sum_{n=\circ}^{\infty}\left(\frac{z}{۳}\right)^n-\frac{۱}{۲z}\sum_{n=\circ}^{\infty}\left(\frac{۱}{z}\right)^n, \quad \left|\frac{z}{۳}\right|<۱,\ \left|\frac{۱}{z}\right|<۱ \\ &= -\frac{۱}{۲}\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{z^n}{۳^{n+۱}}-\frac{۱}{۲}\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{۱}{z^{n+۱}}, \quad |z|<۳,\ |z|>۱. \end{aligned}$$

(د) مشابه قسمت (ج) محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{۱}{۲(z-۳)} - \frac{۱}{۲(z-۱)} \\ &= \frac{۱}{۲z}\frac{۱}{۱-۳/z} - \frac{۱}{۲z}\frac{۱}{۱-۱/z} \\ &= \frac{۱}{۲z}\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{۳}{z}\right)^n - \frac{۱}{۲z}\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{۱}{z}\right)^n, \quad \left|\frac{۳}{z}\right| < ۱, \ \left|\frac{۱}{z}\right| < ۱ \\ &= \frac{۱}{۲}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۳^n}{z^{n+۱}} - \frac{۱}{۲}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{z^{n+۱}}, \quad |z| > ۳, \ |z| > ۱. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

خلاصه فصل ۷ (قسمت دوم)، سری لوران و کاربردهای آن
جلسه شانزدهم ۲۱ مرداد ۱۳۹۳

یادآوری می‌کنیم که اگر تابع $f(z)$ در طوقه‌ی $\{z \mid R_1 < |z - z_0| < R_2\}$، که در آن $0 \le R_1 < R_2$، تحلیلی باشد. در این صورت f داری سری لوران در این طوقه است، یعنی برای هر z در این طوقه داریم

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \\ &= \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

که در آن

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dw, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

که در آن C یک منحنی دلخواه حول z_0 است که در طوقه قرار دارد.

اکنون اگر قرار دهیم $n = -1$ ضریب $\dfrac{1}{z - z_0} = (z-z_0)^{-1}$ به دست می‌آید:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz.$$

بنابراین اگر تابع $f(z)$ در یک همسایگی z_0 به غیر از z_0 تحلیلی باشد و C منحنی بسته‌ی ساده دلخواهی حول z_0 باشد به طوری که $f(z)$ در داخل و روی C (به غیر از z_0) تحلیلی باشد، آن‌گاه

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i a_{-1}.$$

مقدار a_{-1} را مانده‌ی $f(z)$ در z_0 گوییم و با $\operatorname{Res}\{f(z); z = z_0\}$ نشان می‌دهیم. پس تحت شرایط بالا

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\{f(z); z = z_0\}.$$

این مطلب را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد:

قضیه ۷۹. (*قضیه‌ی مانده‌ها*) *فرض کنید $f(z)$ در تعداد متناهی نقطه‌ی z_1، z_2، ...، z_k تحلیلی نباشد. اگر C یک منحنی بسته شامل این نقاط باشد به طوری که $f(z)$ در داخل و روی C تحلیلی باشد (به غیر از z_j، $j = 1, \ldots, k$)، آن‌گاه*

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}\{f(z); z = z_j\}.$$

برای محاسبه‌ی مانده‌ی یک تابع در یک نقطه‌ی غیر تحلیلی لزومی ندارد که همواره سری لوران تابع را بیابیم. برای دیدن این مطلب نقاط غیر تحلیلی را به سه نوع دسته‌بندی می‌کنیم: نقطه‌ی z_0 را نقطه‌ی تکین تنهای $f(z)$ گوییم، هرگاه $f(z)$ در z_0 تحلیلی نباشد ولی در یک همسایگی z_0 (به جز z_0) تحلیلی باشد. به عنوان مثال $z = 0, \pm i$ نقاط تکین تنهای $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+1)}$ هستند. سه نوع نقطه‌ی تکین تنها وجود دارند: اساسی، برداشتنی، و قطب. فرض کنید z_0 نقطه‌ی تکین تنهای $f(z)$ باشد. اگر در بسط لوران $f(z)$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

حول $z_\circ$ توان منفی $z - z_\circ$ وجود نداشته باشد، $z_\circ$ را نقطه‌ی تکین برداشتنی $f(z)$ گوییم. مثلا نقطه‌ی $z = \circ$، نقطه‌ی تکین برداشتنی تابع $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ است، زیرا

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$$

توان منفی برای z وجود ندارد. در واقع در اینجا با تعریف $f(z) = 1$ تابع حاصل در $z = \circ$ تحلیلی است. توجه کنید $z_\circ$ تکین برداشتنی است اگر و تنها اگر $\lim_{z\to z_\circ} f(z)$ وجود داشته باشد. در حالتی که $z_\circ$ نقطه‌ی تکین برداشتنی $f(z)$ باشد $f(z_\circ)$ را برابر $\lim_{z\to z_\circ} f(z)$ تعریف می‌کنیم و $f(z)$ در این حالت در $z_\circ$ تحلیلی است.

اگر در بسط لوران $f(z)$ حول $z_\circ$ تعداد نامتناهی جمله $(z - z_\circ)^n$ با توان منفی وجود داشته باشد، گوییم $z_\circ$ نقطه‌ی تکین اساسی $f(z)$ است. به عنوان مثال نقطه‌ی $z_\circ = \circ$ یک نقطه‌ی اساسی $e^{1/z}$ است، زیرا

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots .$$

در واقع $z_\circ$ نقطه‌ی تکین اساسی است اگر و تنها اگر $(z-z_\circ)^m f(z)$، به ازای هر $m \in \mathbb{N}$ تحلیلی نباشد ($\lim_{z\to z_\circ}(z-z_\circ)^m f(z)$ وجود نداشته باشد).

اگر در بسط لوران $f(z)$ حول $z_\circ$ تعداد متناهی جمله $(z - z_\circ)^n$ با توان منفی وجود داشته باشد، گوییم $z_\circ$ یک قطب $f(z)$ است. در این حالت عدد m وجود دارد که $a_{-m} \neq \circ$ و $a_{-(m+1)} = a_{-(m+2)} = \cdots = \circ$، یعنی سری لوران $f(z)$ حول $z_\circ$ به صورت زیر است

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_\circ)^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{(z - z_\circ)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_\circ} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_\circ)^n.$$

در این حالت گوییم $z_\circ$ قطب مرتبه‌ی m از $f(z)$ است. به ویژه اگر $m = 1$ گوییم $z_\circ$ قطب ساده‌ی $f(z)$ است. توجه کنید که $z_\circ$ قطب مرتبه‌ی m از $f(z)$ است اگر و تنها اگر $(z - z_\circ)^m f(z)$ در $z_\circ$ تحلیلی باشد ($\lim_{z\to z_\circ}(z - z_\circ)^m f(z)$ وجود داشته باشد) ولی $(z - z_\circ)^k f(z)$، برای $k < m$، در $z_\circ$ تحلیلی نباشد ($\lim_{z\to z_\circ}(z - z_\circ)^k f(z)$ وجود نداشته باشد). به عنوان مثال $z_\circ = \circ$ یک قطب مرتبه‌ی ۳ از $f(z) = \frac{\sinh z}{z^4}$ است، زیرا حدهای $\lim_{z\to\circ} f(z)$، $\lim_{z\to\circ} zf(z)$، و $\lim_{z\to\circ} z^2 f(z)$، وجود ندارند و $\lim_{z\to\circ} z^3 f(z) = \lim_{z\to\circ}\frac{\sinh z}{z} = 1$.

قضیه ۸۰. *اگر $z_\circ$ قطب مرتبه‌ی m برای تابع $f(z)$ باشد، آن‌گاه*

$$\operatorname{Res}\{f(z); z = z_\circ\} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_\circ}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z - z_\circ)^m f(z)\right].$$

به ویژه فرض کنید $m = 1$. در این صورت

(الف) $\operatorname{Res}\{f(z); z = z_\circ\} = \lim_{z\to z_\circ}(z - z_\circ)f(z)$.

(ب) اگر $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$، که در آن توابع $g(z)$ و $h(z)$ در $z_\circ$ تحلیلی هستند به طوری‌که $g(z_\circ) \neq \circ$، $h(z_\circ) = \circ$ و $h'(z_\circ) \neq \circ$، آن‌گاه $\operatorname{Res}\{f(z); z = z_\circ\} = \frac{g(z_\circ)}{h'(z_\circ)}$.

اثبات. سری لوران $f(z)$ در یک طوقه‌ی $\circ < |z - z_\circ| < r$ به صورت زیر است

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_\circ)^n.$$

فرض کنید $g(z) = (z - z_\circ)^m f(z)$. داریم
$$g(z) = (z - z_\circ)^m f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_\circ)^{n+m} = \sum_{j=\circ}^{\infty} a_{j-m} (z - z_\circ)^j.$$
پس $g(z)$ یک تابع تحلیلی است و در نتیجه برای $j = \circ, ۱, ۲, \ldots$ داریم
$$a_{j-m} = \frac{g^{(j)}(z_\circ)}{j!} = \lim_{z \to z_\circ} \frac{g^{(j)}(z)}{j!}.$$
به ویژه برای $j = m - ۱$ داریم
$$a_{-۱} = \frac{g^{(m-۱)}(z_\circ)}{(m-۱)!} = \lim_{z \to z_\circ} \frac{g^{(m-۱)}(z)}{(m-۱)!}.$$
حال اگر $m = ۱$، آن‌گاه $a_{-۱} = \lim_{z \to z_\circ} g(z) = \lim_{z \to z_\circ} (z - z_\circ) f(z)$. همچنین اگر $m = ۱$ و $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$، آن‌گاه
$$a_{-۱} = \lim_{z \to z_\circ} (z - z_\circ) f(z) = \lim_{z \to z_\circ} (z - z_\circ) \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \to z_\circ} \frac{g(z)}{\frac{h(z) - h(z_\circ)}{z - z_\circ}} = \frac{g(z_\circ)}{h'(z_\circ)}. \quad \blacksquare$$

چند مثال

مثال ۸۱. *مقدار انتگرال زیر را بیابید، که در آن C منحنی بسته‌ی ساده است که $z = i$ را قطع نمی‌کند*
$$I = \int_C e^{۱/(z-i)}\, dz.$$

حل تابع $f(z) = e^{۱/(z-i)}$ فقط در $z = i$ تحلیلی نیست. پس دو حالت وجود دارد.

حالت اول: $z = i$ خارج از منحنی C باشد. در این صورت $f(z)$ در داخل و روی منحنی C تحلیلی است. در این حالت بنا به قضیه‌ی کشی $I = \circ$.

حالت دوم: $z = i$ داخل منحنی C باشد. در این صورت طبق قضیه‌ی مانده‌ها داریم $I = ۲\pi i \operatorname{Res}\{f(z); z = i\}$. بنابراین باید ضریب $\frac{۱}{z-i}$ در بسط لوران $f(z)$ را بیابیم. در سری $e^z = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{۱}{n!} z^n$ به جای z مقدار $\frac{۱}{z-i}$ را قرار می‌دهیم
$$e^{۱/(z-i)} = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{۱}{n!(z-i)^n}.$$
ضریب $\frac{۱}{z-i}$ در این بسط برابر ۱ است، یعنی $\operatorname{Res}\{f(z); z = i\} = ۱$. بنابراین
$$I = \int_C e^{۱/(z-i)}\, dz = ۲\pi i. \quad \blacksquare$$

مثال ۸۲. *مقدار انتگرال زیر را بیابید، که در آن C منحنی بسته‌ی ساده است که $z = -i$ را قطع نمی‌کند*
$$I = \int_C e^{z/(z+i)}\, dz.$$

حل تابع $f(z) = e^{z/(z+i)}$ فقط در $z = -i$ تحلیلی نیست. پس دو حالت وجود دارد.

حالت اول: $z = -i$ خارج از منحنی C باشد. در این صورت $f(z)$ در داخل و روی منحنی C تحلیلی است. در این حالت بنا به قضیه‌ی کشی $I = \circ$.

حالت دوم: $z=-i$ داخل منحنی C باشد. در این صورت طبق قضیه‌ی مانده‌ها داریم $I=2\pi i\,\mathrm{Res}\,\{f(z);z=-i\}$. بنابراین باید ضریب $\frac{1}{z+i}$ در بسط لوران $f(z)$ را بیابیم. برای یافتن سری لوران $f(z)$ حول $z=-i$ ابتدا در صورت کسر i را اضافه و کم می‌کنیم و سپس از سری مک لوران e^x استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned}
e^{z/(z+i)} &= e^{(z+i-i)/(z+i)}\\
&= e^{1-\frac{i}{z+i}}\\
&= ee^{-i/(z+i)}\\
&= e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{-i}{z+i}\right)^n\\
&= e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!(z+i)^n}.
\end{aligned}$$

ضریب $\frac{1}{z+i}$ در این بسط برابر $-ie$ است، یعنی $\mathrm{Res}\,\{f(z);z=-i\}=-ie$. بنابراین

$$I=\int_C e^{z/(z+i)}\,dz=2\pi i(-ie)=2\pi e. \quad \blacksquare$$

مثال ۸۳. *مقدار انتگرال زیر را بیابید، C یک منحنی بسته‌ی ساده شامل $z=2$ است*

$$I=\int_C ze^{z/(z-2)}\,dz.$$

حل تابع $f(z)=ze^{z/(z-2)}$ فقط در نقطه‌ی $z=2$ تحلیلی نیست. چون $z=2$ درون منحنی C است، طبق قضیه‌ی مانده‌ها $I=2\pi i\mathrm{Res}\,\{f(z);z=2\}$. بنابراین باید ضریب $\frac{1}{z-2}$ در بسط لوران $f(z)$ را بیابیم. برای یافتن این ضریب مشابه مثال قبل عمل می‌کنیم

$$\begin{aligned}
ze^{z/(z-2)} &= ze^{(z-2+2)/(z-2)}\\
&= ze^{1+\frac{2}{z-2}}\\
&= e((z-2)+2)e^{2/(z-2)}\\
&= e((z-2)+2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{2}{z-2}\right)^n\\
&= e((z-2)+2)\left(1+\frac{2}{z-2}+\frac{4}{2(z-2)^2}+\frac{8}{6(z-2)^3}+\cdots\right)
\end{aligned}$$

ضریب $\frac{1}{z-2}$ در این بسط برابر $e(2+4)=6e$ است، یعنی $\mathrm{Res}\,\{f(z);z=2\}=6e$. بنابراین

$$I=\int_C ze^{z/(z-2)}\,dz=2\pi i(6e)=12\pi ie. \quad \blacksquare$$

مثال ۸۴. *مقدار انتگرال زیر را بیابید، C منحنی بسته‌ی ساده شامل $z=1$ است*

$$I=\int_C ze^{z/(z-1)^2}\,dz.$$

حل تابع $f(z) = ze^{z/(z-۱)^۲}$ فقط در نقطه‌ی $z = ۱$ تحلیلی نیست. چون $z = ۲$ درون منحنی C است، طبق قضیه‌ی مانده‌ها $I = ۲\pi i \mathrm{Res}\{f(z); z = ۱\}$. بنابراین باید ضریب $\frac{۱}{z-۱}$ در بسط لوران $f(z)$ را بیابیم. برای یافتن این ضریب مشابه مثال قبل عمل می‌کنیم

$$\begin{aligned}
ze^{z/(z-۱)^۲} &= ze^{\frac{z-۱+۱}{(z-۱)^۲}} \\
&= ((z-۱)+۱)e^{\frac{۱}{z-۱}+\frac{۱}{(z-۱)^۲}} \\
&= ((z-۱)+۱)e^{۱/(z-۱)}e^{۱/(z-۱)^۲} \\
&= ((z-۱)+۱)\left(\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n!}\left(\frac{۱}{z-۱}\right)^n\right)\left(\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n!}\left(\frac{۱}{(z-۱)^۲}\right)^n\right) \\
&= \left(\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n!}\frac{۱}{(z-۱)^{n-۱}}\right)\left(\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n!}\frac{۱}{(z-۱)^{۲n}}\right)+ \\
&\quad \left(\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n!}\frac{۱}{(z-۱)^{n}}\right)\left(\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n!}\frac{۱}{(z-۱)^{۲n}}\right)
\end{aligned}$$

$$= \left[(z-۱)+۱+\frac{۱}{۲!}\frac{۱}{z-۱}+\cdots\right]\left[۱+\frac{۱}{(z-۱)^۲}+\frac{۱}{۲!}\frac{۱}{(z-۱)^۴}+\cdots\right]+$$
$$\left[۱+\frac{۱}{z-۱}+\frac{۱}{۲!}\frac{۱}{(z-۱)^۲}+\cdots\right]\left[۱+\frac{۱}{(z-۱)^۲}+\frac{۱}{۲!}\frac{۱}{(z-۱)^۴}+\cdots\right]$$
$$= \cdots+\left(۱+\frac{۱}{۲}+۱\right)\frac{۱}{z-۱}+\cdots$$

ضریب $\frac{۱}{z-۱}$ در این بسط برابر $\frac{۵}{۲}$ است، یعنی $\mathrm{Res}\{f(z); z = ۲\} = \frac{۵}{۲}$. بنابراین

$$I = \int_C ze^{z/(z-۲)}\,dz = ۵\pi i. \quad \blacksquare$$

مثال ۸۵. *انتگرال زیر را محاسبه کنید*

$$\int_{|z|=۱}\frac{e^z}{\tan z}\,dz.$$

حل قرار می‌دهیم $f(z) = \frac{e^z}{\tan z} = \frac{e^z\cos z}{\sin z}$. توابع $e^z\cos z$ و $\sin z$ همه جا تحلیلی هستند. پس $f(z)$ فقط در ریشه‌های $\sin z = ۰$ تحلیلی نیست. ریشه‌های این معادله عبارتند از $z = ۲k\pi$، $k = ۰, \pm۱, \pm۲, \ldots$. پس تابع $f(z)$ در داخل و روی منحنی $|z| = ۱$ تحلیلی است به جز نقطه‌ی $z = ۰$. چون $\lim_{z\to۰} zf(z) = ۱$، نقطه‌ی $z = ۰$ قطب ساده‌ی $f(z)$ است و $\mathrm{Res}\{f(z); z = ۰\} = ۱$. در نتیجه طبق قضیه‌ی مانده‌ها

$$\int_C f(z)\,dz = ۲\pi i\mathrm{Res}\{f(z); z = ۰\} = ۲\pi i. \quad \blacksquare$$

مثال ۸۶. *انتگرال* $\int_{|z|=۱}\frac{e^z-۱}{۱-\cos z}\,dz$ *را محاسبه کنید.*

حل چون صورت و مخرج تابع $f(z) = \frac{e^z-۱}{۱-\cos z}$ در همه‌ی نقاط تحلیلی هستند، پس تابع f تنها در ریشه‌های مخرج

کسر تحلیلی نیست. چون

$$\begin{aligned} \cos z = ۱ &\iff \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{۲} = ۱ \\ &\iff e^{iz}+e^{-iz} = ۲ \\ &\iff e^{۲iz} + ۱ - ۲e^{iz} = ۰ \\ &\iff (e^{iz}-۱)^۲ = ۰ \\ &\iff e^{iz} = ۱ \\ &\iff z = ۲n\pi, \quad n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots \end{aligned}$$

پس $f(z)$ به‌جز در نقطه‌ی $z = ۰$ در داخل و روی منحنی $|z| = ۱$ تحلیلی است. به صورت زیر نیز می‌توانیم ریشه‌های $\cos z = ۱$ را بیابیم. چون

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

پس

$$\cos z = ۱ \iff \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = ۱ \iff \cos x \cosh y = ۱, \quad \sin x \sinh y = ۰$$

از $\sin x \sinh y = ۰$ نتیجه می‌شود $x = n\pi$ یا $y = ۰$. اگر $x = k\pi$، آن‌گاه از $\cos x \cosh y = ۱$ داریم $\cosh y = (-۱)^k$ که نتیجه می‌دهد $k = ۲n$ و $y = ۰$. اگر $y = ۰$، آن‌گاه از $\cos x \cosh y = ۱$ داریم $\cos x = ۱$ که نتیجه می‌دهد $x = ۲n\pi$.

توجه کنید که $z_۰ = ۰$ ریشه‌ای از صورت کسر نیز هست. اکنون تعیین می‌کنیم که آیا $z_۰ = ۰$ تکین برداشتنی یا قطب است. چون (استفاده از قاعده‌ی هوپیتال)

$$\begin{aligned} &\lim_{z\to ۰} f(z) = \lim_{z\to ۰} \frac{e^z - ۱}{۱-\cos z} = \lim_{z\to ۰} \frac{e^z}{\sin z} \quad (\text{وجود ندارد}) \\ &\lim_{z\to ۰} z f(z) = \lim_{z\to ۰} \frac{z(e^z-۱)}{۱-\cos z} = \lim_{z\to ۰} \frac{e^z + ze^z - ۱}{\sin z} = \lim_{z\to ۰} \frac{۲e^z + ze^z}{\cos z} = ۲ \end{aligned}$$

پس $z = ۰$ قطب ساده‌ی f است و

$$\mathrm{Res}\{f(z); z = ۰\} = ۲$$

بنابراین

$$\int_{|z|=۱} \frac{e^z - ۱}{۱-\cos z}\, dz = ۲\pi i \mathrm{Res}\{f(z); z=۰\} = ۲\pi i \times ۲ = ۴\pi i.$$

مثال ۸۷. *انتگرال* $\displaystyle\int_{|z|=۱} \frac{۱-e^{۲z}}{z^۴}\, dz$ *را محاسبه کنید.*

حل چون صورت و مخرج تابع $f(z) = \dfrac{۱-e^{۲z}}{z^۴}$ در همه‌ی نقاط تحلیلی هستند، پس تابع f تنها در ریشه‌های مخرج کسر تحلیلی نیست. پس $f(z)$ به‌جز در نقطه‌ی $z = ۰$ در داخل و روی منحنی $|z| = ۱$ تحلیلی است. اکنون تعیین می‌کنیم که آیا

$z_0 = 0$ تکین برداشتنی یا قطب است. چون

$$\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1-e^{2z}}{z^2} \quad \text{(وجود ندارد)}$$
$$\lim_{z\to 0} z^3 f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1-e^{2z}}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{-2e^{2z}}{1} = -2$$

پس $z = 0$ قطب مرتبه‌ی ۳ ساده‌ی f است و در نتیجه

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\{f(z); z=0\} &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2} z^3 f(z)\\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\frac{1-e^{2z}}{z}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\frac{-2ze^{2z}-z(1-e^{2z})}{z^2}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{2+e^{2z}(-2+4z-4z^2)}{z^3} = -\frac{8}{6}.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\int_{|z|=1} \frac{1-e^{2z}}{z^4}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\{f(z); z=0\} = 2\pi i \times (-\frac{8}{3}) = -\frac{16}{3}\pi i.$$

با توجه به این‌که مشتق‌گیری‌های بالا قدر پرزحمت است، می‌توانیم مانده‌ی f در $z_0 = 0$ را با استفاده از سری لوران بیابیم:

$$\frac{1-e^{2z}}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2z)^n}{n!}\right) = -\frac{1}{z^4}\left(\frac{2z}{1!}+\frac{2^2z^2}{2!}+\frac{2^3z^3}{3!}+\cdots\right) = -\frac{2^3}{3!}\frac{1}{z}+\cdots$$

بنابراین مانده‌ی f در $z_0 = 0$ برابر است با $-\frac{8}{6} = -\frac{2^3}{3!}$.

مثال ۸۸. *انتگرال* $\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2(e^z-1)}\,dz$ *را محاسبه کنید.*

حل تابع $f(z) = \frac{1}{z^2(e^z-1)}$ در ریشه‌های مخرج کسر تحلیلی نیست. چون

$$e^z - 1 = 0 \Longleftrightarrow e^z = 1 \Longleftrightarrow z = 2n\pi i,\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

پس تابع f به جز نقطه‌ی $z_0 = 0$ در داخل و روی دایره‌ی $|z| = 1$ تحلیلی است. مانده‌ی $f(z)$ را در $z_0 = 0$ می‌یابیم. چون $z_0 = 0$ صفر مرتبه‌ی سوم مخرج کسر است پس $z_0 = 0$ قطب مرتبه‌ی سوم f است (چون $\lim_{z\to 0} z^3 f(z) = 1$، $z_0 = 0$ قطب

مرتبه‌ی ۳ برای $f(z)$ است). بنابراین

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\{f(z); z=0\} &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}z^3 f(z) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\frac{z}{e^z-1}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\frac{e^z-1-ze^z}{(e^z-1)^2}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{(-ze^z)(e^z-1)^2-2e^z(e^z-1)(e^z-1-ze^z)}{(e^z-1)^4}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{(-ze^z)(e^z-1)-2e^z(e^z-1-ze^z)}{(e^z-1)^3}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{-ze^{2z}+ze^z-2e^{2z}+2e^z+2ze^{2z}}{(e^z-1)^3}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{ze^{2z}+ze^z-2e^{2z}+2e^z}{(e^z-1)^3}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{e^{2z}+2ze^{2z}+e^z+ze^z-4e^{2z}+2e^z}{3e^z(e^z-1)^2}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{-3e^z+z+2ze^z+3}{3(e^z-1)^2}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{1-e^z+2e^z z}{6e^z(e^z-1)} = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{e^z+2e^z z}{12e^{2z}-6e^z}\\
&= \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

پس

$$\int_{|z|=1}\frac{1}{z^2(e^z-1)}\,dz = 2\pi i\frac{1}{12} = \frac{\pi i}{6}.$$

با توجه به این‌که مشتق‌گیری‌های بالا قدر پرزحمت است، می‌توانیم مانده‌ی f در $z_0 = 0$ را با استفاده از تقسیم ۱ بر تابع $z^2(e^z-1) = z^2\left(z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) = z^2 - \frac{z^4}{2!} + \frac{z^5}{3!} + \cdots$ بیابیم.

مثال ۸۹. *انتگرال* $\int_{|z-1|=2}\frac{f(z)}{z}\,d\bar{z}$ *را محاسبه کنید، تابع $f(z)$ در داخل و روی دایره‌ی $|z-1| = 2$ تحلیلی است.*

حل معادله‌ی پارامتری دایره به مرکز $z = 1$ و شعاع ۲، یعنی دایره‌ی $|z-1| = 2$، عبارت است از $z(t) = 1 + 2e^{it}$، $0 \le t \le 2\pi$. چون $dz = 2ie^{it}\,dt$ نتیجه می گیریم که

$$d\bar{z} = -2ie^{-it}dt = -2i\frac{e^{it}}{e^{2it}}dt = -\frac{dz}{\left(\frac{z-1}{2}\right)^2}.$$

از این رو

$$\int_{|z-1|=2}\frac{f(z)}{z}\,d\bar{z} = -4\int_{|z-1|=2}\frac{f(z)}{z}\frac{dz}{(z-1)^2}.$$

نقطه‌ی $z = 0$ قطب ساده و نقطه‌ی $z = 1$ قطب مرتبه‌ی دوم تابع $g(z) = \frac{f(z)}{z(z-1)^2}$ هستند. مانده‌ی $g(z)$ در این نقاط

را محاسبه می‌کنیم

$$\operatorname{Res}\{g(z); z=۰\} = \lim_{z\to ۰} zg(z) = f(۰)$$
$$\operatorname{Res}\{g(z); z=۱\} = \lim_{z\to ۱} \frac{d}{dz}[(z-۱)^۲]g(z) = \lim_{z\to ۱} \frac{d}{dz}\frac{f(z)}{z} = f'(۱) - f(۱).$$

بنابراین طبق قضیه‌ی مانده‌ها داریم

$$\begin{aligned}\int_{|z-۱|=۲} \frac{f(z)}{z}\, d\bar{z} &= -۴\int_{|z-۱|=۲} \frac{f(z)}{z}\frac{dz}{(z-۱)^۲}\\ &= (-۴)۲\pi i(\operatorname{Res}\{f(z); z=۰\} + \operatorname{Res}\{f(z); z=۱\})\\ &= -۸\pi i[f(۰) + (f'(۱) - f(۱))].\end{aligned}$$

مثال ۹۰. *انتگرال* $\int_{|z|=۲} \frac{۱}{z-۱}\sin\frac{۱}{z}\, dz$ *را محاسبه کنید.*

حل نقطه‌ی $z=۰$ نقطه‌ی تکین اساسی و نقطه‌ی $z=۱$ قطب ساده‌ی $f(z) = \frac{۱}{z-۱}\sin\frac{۱}{z}$ است. ابتدا مانده‌ی $f(z)$ را در $z=۱$ می‌یابیم

$$\operatorname{Res}\{f(z); z=۱\} = \lim_{z\to ۱}(z-۱)f(z) = \sin ۱.$$

اکنون از بسط لوران $f(z)$ برای یافتن مانده آن در $z=۰$ استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned}\frac{۱}{z-۱}\sin\frac{۱}{z} &= -\left(\sum_{n=۰}^{\infty} z^n\right)\left(\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)!z^{۲n+۱}}\right)\\ &= -(۱+z+z^۲+\cdots)\left(\frac{۱}{z} - \frac{۱}{۳!z^۳} + \frac{۱}{۵!z^۵} - \cdots\right).\end{aligned}$$

به ازای هر $n=۰, ۱, ۲, \ldots$، ضرب هر جمله به صورت $z^{۲n}$ از سری اول در جمله‌ای از سری دوم به صورت $\frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)!z^{۲n+۱}}$ ضریبی از $\frac{۱}{z}$ را به دست می‌دهد. پس ضریب $\frac{۱}{z}$ در حاصل‌ضرب بالا عبارت است از

$$-\left(۱ - \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۵!} - \cdots\right) = -\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)!} = -\sin ۱.$$

بنابراین طبق قضیه‌ی مانده‌ها داریم

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\, dz &= ۲\pi i(\operatorname{Res}\{f(z); z=۰\} + \operatorname{Res}\{f(z); z=۱\})\\ &= ۲\pi i[\sin ۱ - \sin ۱]\\ &= ۰. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

فصل ۷، محاسبه‌ی انتگرال‌های حقیقی

جلسه هفدهم ۲۶ مرداد ۱۳۹۳

یادآوری می‌کنیم که اگر تابع $f(x)$ در $(-\infty, +\infty)$ پیوسته باشد، یک انتگرال ناسره به صورت $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ به صورت

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_{-R}^{۰} f(x)\,dx + \lim_{R\to+\infty} \int_{۰}^{R} f(x)\,dx$$

تعریف می‌شود، مشروط بر این‌که دو حد بالا وجود داشته باشند. توجه کنید که اگر $f(x)$ یک تابع زوج باشد، آن‌گاه داریم $\int_{-R}^{۰} f(x)\,dx = \int_{۰}^{R} f(x)\,dx = \frac{۱}{۲}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$ و بنابراین $\int_{۰}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{۱}{۲}\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$.

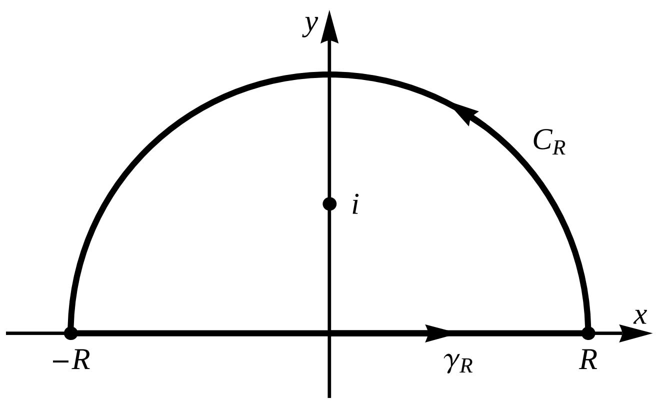
یک تابع گویا تابعی به صورت $\frac{p(x)}{q(x)}$ است، که در آن $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ای هستند. می‌خواهیم انتگرال ناسره‌ی توابع گویا به صورت $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ را با استفاده از قضیه‌ی مانده‌ها بیابیم. برای تشریح این روش ابتدا

$$\int_{۰}^{+\infty} \frac{dx}{x^{۲}+۱} = \frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^{۲}+۱}$$

را محاسبه می‌کنیم. اگر از تابع $f(z) = \frac{۱}{z^{۲}+۱}$ در امتداد تمام محور حقیقی انتگرال بگیریم مقدار انتگرال مورد نظر به دست می‌آید، یعنی

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

که در آن γ_R، پاره خط $y = ۰$، $-R \le x \le R$ است. منحنی بسته‌ی $\Gamma_R = C_R + \gamma_R$ را در نظر می‌گیریم، که در آن C_R نیم دایره‌ی بالایی از دایره‌ی $|z| = R$، و γ_R پاره خط $y = ۰$، $-R \le x \le R$ است و $R > ۱$ (شکل ۱۳ را ببیند). در این



شکل ۱۳: منحنی بسته‌ی $\Gamma_R = C_R + \gamma_R$، $R > ۱$.

صورت $f(z)$ دارای تنها یک قطب $z = i$ در داخل Γ_R است و این نقطه قطب ساده‌ی $f(z)$ است. مانده‌ی $f(z)$ در $z = i$ عبارت است از

$$\operatorname{Res}\{f(z), z = i\} = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{۱}{z^{۲}+۱} = \lim_{z\to i}\frac{۱}{z+i} = \frac{۱}{۲i} = \frac{-i}{۲}.$$

از این‌رو طبق قضیه‌ی مانده‌ها داریم

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = ۲\pi i\,\mathrm{Res}\,\{f(z), z=i\} = \pi.$$

یادآوری می‌کنیم که به ازای هر دو عدد مختلط z و w نامساوی مثلث

$$||z|-|w|| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|$$

را داریم. از این نامساوی در ادامه استفاده می‌کنیم. اکنون چون برای هر $z \in C_R$ داریم

$$|z^۲+۱| \geq |z|^۲ - ۱ = R^۲ - ۱$$

به ازای هر $z \in C_R$ خواهیم داشت

$$|f(z)| = \frac{۱}{|z^۲+۱|} \leq \frac{۱}{R^۲-۱}.$$

در نتیجه طبق قضیه‌ی ۶۱ داریم

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{۱}{R^۲-۱}\pi R.$$

اکنون چون وقتی $R \to +\infty$ طرف راست عبارت بالا به صفر میل می‌کند، پس طرف چپ نیز به صفر میل می‌کند و از آنجا نتیجه می‌شود که

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = ۰.$$

از این رو

$$\begin{aligned} \pi &= \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz \\ &= \lim_{R\to\infty}\left(\int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right) \\ &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{۱}{x^۲+۱}\,dx. \end{aligned}$$

در ادامه مثال‌های بیشتری از محاسبه‌ی انتگرال‌های ناسره می‌آوریم.

مثال ۹۱. *مطلوبست محاسبه‌ی انتگرال*

$$\int_{۰}^{+\infty} \frac{x^۲}{x^۴+۱}\,dx.$$

حل تابع $f(z) = \dfrac{z^۲}{z^۴+۱}$ را در نظر می‌گیریم و انتگرال خطی آن در طول منحنی $\Gamma_R = C_R + \gamma_R$، که در آن C_R نیم‌دایره‌ی بالایی از دایره‌ی $|z| = R$، و γ_R پاره خط $y = ۰$، $-R \leq x \leq R$ است (شکل ۱۴ را ببینید) را محاسبه می‌کنیم. تابع $f(z)$ دارای چهار قطب ساده‌ی $\pm e^{i\pi/۴}$ و $\pm e^{۳i\pi/۴}$ است. دو قطب $z = e^{i\pi/۴}$ و $z = e^{۳i\pi/۴}$ در داخل Γ_R قرار دارند.

مانده‌ی $f(z)$ در این نقاط را محاسبه می‌کنیم

$$\operatorname{Res}\{f(z); z=e^{i\pi/4}\} = \frac{(e^{i\pi/4})^2}{4(e^{i\pi/4})^3} = \frac{1}{4}e^{-i\pi/4} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}$$
$$\operatorname{Res}\{f(z); z=e^{i3\pi/4}\} = \frac{(e^{3i\pi/4})^2}{4(e^{3i\pi/4})^3} = \frac{1}{4}e^{-3i\pi/4} = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}}$$

بنابراین طبق قضیه‌ی مانده‌ها

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= 2\pi i(\operatorname{Res}\{f(z); z=e^{i\pi/4}\} + \operatorname{Res}\{f(z); z=e^{i3\pi/4}\})\\ &= 2\pi i\left(\frac{1-i}{4\sqrt{2}} - \frac{1+i}{4\sqrt{2}}\right)\\ &= 2\pi i\frac{-i}{2\sqrt{2}}\\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

اکنون چون برای هر $z \in C_R$ داریم

$$|z^4+1| \geq |z|^4 - 1 = R^4 - 1$$

برای هر $z \in C$ خواهیم داشت

$$|f(z)| = \frac{z^2}{|z^4+1|} \leq \frac{R^2}{R^4-1}.$$

در نتیجه

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{R^2}{R^4-1}\pi R.$$

اکنون چون وقتی $R \to +\infty$ طرف راست عبارت بالا به صفر میل می‌کند، پس طرف چپ نیز به صفر میل می‌کند و از آنجا نتیجه می‌شود که

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0.$$

از این رو

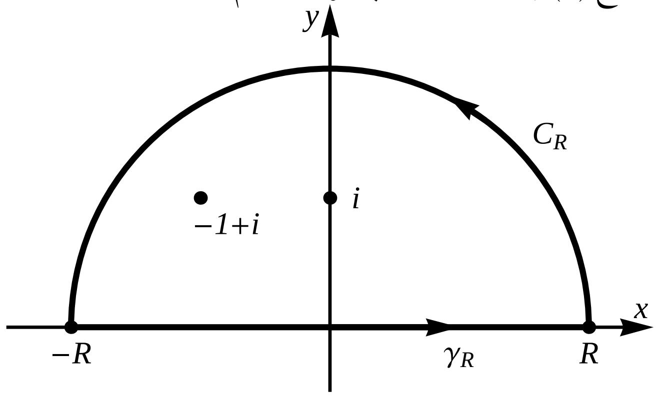
$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\sqrt{2}} &= \lim_{R\to\infty}\int_C f(z)\,dz\\ &= \lim_{R\to\infty}\left(\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right)\\ &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\,dx.\end{aligned}$$

در نتیجه $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

مثال ۹۲. *مطلوبست محاسبه‌ی انتگرال*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{۲}}{(x^{۲}+۱)^{۲}(x^{۲}+۲x+۲)}\,dx.$$

حل تابع $f(z)=\dfrac{z^{۲}}{(z^{۲}+۱)^{۲}(z^{۲}+۲z+۲)}$ را در نظر گرفته و انتگرال خطی آن در طول منحنی $\Gamma_R=C_R+\gamma_R$، که در آن C_R نیم‌دایره‌ی بالایی از دایره‌ی $|z|=R$، و γ_R پاره خط $y=۰$، $-R\le x\le R$ است و $R>\sqrt{۲}$ است (شکل ۱۴ را ببینید) را محاسبه می‌کنیم. تابع $f(z)$ دارای دو قطب مرتبه‌ی دوم در $z=i$ و $z=-i$ است؛ همچنین $f(z)$ دارای دو



شکل ۱۴: منحنی بسته‌ی $\Gamma_R=C_R+\gamma_R$، $R>\sqrt{۲}$، در مثال ۹۲.

قطب ساده در $z=-۱+i$ و $z=-۱-i$ است. از این قطب‌ها i و $-۱+i$ در داخل Γ_R قرار دارند. مانده‌ی $f(z)$ در این نقاط را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\{f(z);z=i\} &= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}[(z-i)^{۲}f(z)] = -\frac{۳}{۲۵}+\frac{۹}{۱۰۰}i\\
\operatorname{Res}\{f(z);z=-۱+i\} &= \lim_{z\to -۱+i}(z-(-۱+i))f(z) = \frac{۳}{۲۵}-\frac{۴}{۲۵}i.
\end{aligned}$$

بنابراین طبق قضیه‌ی مانده‌ها

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\,dz &= ۲\pi i(\operatorname{Res}\{f(z);z=i\}+\operatorname{Res}\{f(z);z=-۱+i\})\\
&= ۲\pi i\left(-\frac{۳}{۲۵}+\frac{۹}{۱۰۰}i+\frac{۳}{۲۵}-\frac{۴}{۲۵}i\right)\\
&= \frac{۷\pi}{۵۰}
\end{aligned}$$

اکنون چون برای هر $z\in C_R$ داریم

$$\begin{aligned}
|z^{۲}+۲z+۲| &= |z-(-۱+i)||z-(-۱-i)|\\
&\ge (|z|-|-۱+i|)(|z|-|-۱-i|)\\
&= (|z|-\sqrt{۲})(|z|-\sqrt{۲})\\
&= (R-\sqrt{۲})(R-\sqrt{۲})\\
&= (R-\sqrt{۲})^{۲}
\end{aligned}$$

و

$$|z^2+1| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1$$

برای هر $z \in C_R$ خواهیم داشت

$$|f(z)| = \frac{|z|^2}{|z^2+1|^2|z^2+2z+2|} \leq \frac{R^2}{(R^2-1)^2(R-\sqrt{2})^2}.$$

در نتیجه طبق قضیه‌ی ۶۱ داریم

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{R^2}{(R^2-1)^2(R-\sqrt{2})^2}\pi R.$$

اکنون چون وقتی $R \to +\infty$ طرف راست عبارت بالا به صفر میل می‌کند، پس طرف چپ نیز به صفر میل می‌کند و از آنجا نتیجه می‌شود که

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = 0.$$

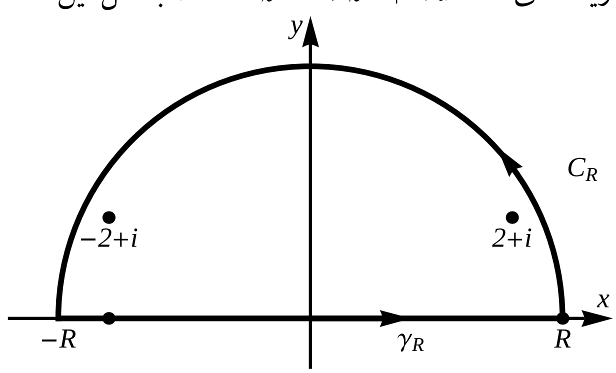
از این رو

$$\begin{aligned}
\frac{7\pi}{50} &= \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz \\
&= \lim_{R\to\infty}\left(\int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right) \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

مثال ۹۳. *مطلوبست محاسبه‌ی انتگرال*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4-6x^2+25}\,dx.$$

حل تابع $f(z) = \dfrac{1}{z^4-6z^2+25}$ را در نظر گرفته و انتگرال خطی آن در طول منحنی $\Gamma_R = C_R + \gamma_R$، که در آن C_R نیم‌دایره‌ی بالایی از دایره‌ی $|z| = R$، و γ_R پاره خط $y = 0$، $-R \leq x \leq R$ است و $R > \sqrt{5}$، (شکل ۱۵ را ببینید) را محاسبه می‌کنیم. قطب‌های $f(z)$ ریشه‌های $z^4 - 6z^2 + 25 = 0$ هستند. با حل این معادله داریم



شکل ۱۵: منحنی بسته‌ی $\Gamma_R = C_R + \gamma_R$، $R > \sqrt{5}$، در مثال ۹۳.

$$z^۲ = ۳ \pm \sqrt{۹ - ۲۵} = ۳ \pm ۴i.$$

بنابراین ریشه‌های معادله عبارتند از $۲ \pm i$ و $-۲ \pm i$. در نتیجه نقاط $۲ + i$ و $-۲ + i$ قطب‌های ساده‌ی $f(z)$ هستند که در داخل منحنی $|z| = R$ قرار دارند. مانده‌ی $f(z)$ در این نقاط را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\,\{f(z); z = ۲ + i\} &= \lim_{z \to ۲+i} \frac{۱}{(z - ۲ + i)(z + ۲ - i)(z + ۲ + i)} \\
&= \frac{۱}{(۲i)(۴)(۴ + ۲i)} = \frac{۱}{۱۶i(۲ + i)} \\
\mathrm{Res}\,\{f(z); z = -۲ + i\} &= \lim_{z \to -۲+i} \frac{۱}{(z - ۲ - i)(z + ۲ - i)(z + ۲ + i)} \\
&= \frac{۱}{(-۴)(-۴ + ۲i)(۲i)} = \frac{۱}{۱۶i(۲ - i)}
\end{aligned}$$

بنابراین طبق قضیه‌ی مانده‌ها

$$\int_C f(z)\,dz = ۲\pi i \left[\frac{۱}{۱۶i(۲ + i)} + \frac{۱}{۱۶i(۲ - i)}\right] = \frac{\pi}{۱۰}.$$

از طرف دیگر برای هر $z \in C$، چون

$$\begin{aligned}
|z^۲ - ۳ + ۴i| &\geq |z|^۲ - |۳ - ۴i| = |z|^۲ - ۵ = R^۲ - ۵ \\
|z^۲ - ۳ - ۴i| &\geq |z|^۲ - |۳ + ۴i| = |z|^۲ - ۵ = R^۲ - ۵,
\end{aligned}$$

داریم

$$|f(z)| = \left|\frac{۱}{z^۴ - ۶z^۲ + ۲۵}\right| = \frac{۱}{|(z^۲ - ۳ + ۴i)(z^۲ - ۳ - ۴i)|} \leq \frac{۱}{(R^۲ - ۵)^۲}.$$

پس طبق قضیه‌ی ۶۱ داریم

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{۱}{(R^۲ - ۵)^۲}\pi R.$$

در نتیجه چون وقتی $R \to +\infty$ طرف راست عبارت بالا به صفر میل می‌کند، پس طرف چپ نیز به صفر میل می‌کند و از آنجا نتیجه می‌شود که

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = ۰.$$

از این رو

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{۱۰} &= \lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz \\
&= \lim_{R \to \infty} \left(\int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right) \\
&= \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{۱}{x^۴ - ۶x^۲ + ۲۵}\,dx.
\end{aligned}$$

در نتیجه
$$\int_{۰}^{+\infty} \frac{۱}{x^{۴} - ۶x^{۲} + ۲۵}\, dx = \frac{\pi}{۲۰}. \quad \blacksquare$$

در ادمه چند مثال از محاسبه‌ی انتگرال‌های ناسره که تابع زیر انتگرال مضربی از یک تابع گویا در یکی از توابع سینوس یا کسینوس باشد، را ارائه می‌کنیم.

مثال ۹۴. *مطلوبست محاسبه‌ی انتگرال*
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^{۲}+۱)^{۲}}\, dx.$$

حل تابع $f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z^{۲}+۱)^{۲}}$ را در نظر گرفته و انتگرال خطی آن را در طول منحنی بسته‌ی $\Gamma_R = C_R + \gamma_R$ محاسبه می‌کنیم، که در آن C_R نیم‌دایره‌ی بالایی از دایره‌ی $|z| = R$، و γ_R پاره خط $y = ۰$، $-R \leq x \leq R$، $R > ۱$ است (شکل ۱۳ را ببیند). نقطه‌ی $z = i$ قطب مرتبه‌ی دوم $f(z)$ داخل Γ_R است. مانده‌ی $f(z)$ در این نقطه را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\{f(z); z = i\} &= \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}[(z-i)^{۲} f(z)] \\
&= \lim_{z \to i} \frac{d}{dz} \frac{ze^{iz}}{(z+i)^{۲}} \\
&= \lim_{z \to i} \frac{(e^{iz} + ize^{iz})(z+i)^{۲} - ۲(z+i)ze^{iz}}{(z+i)^{۴}} \\
&= \frac{(e^{-۱} - e^{-۱})(۲i) - ۲ie^{-۱}}{(۲i)^{۳}} \\
&= \frac{e^{-۱}}{۴}.
\end{aligned}$$

بنابراین طبق قضیه‌ی مانده‌ها
$$\int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = ۲\pi i \operatorname{Res}\{f(z); z = i\} = ۲\pi i \frac{e^{-۱}}{۴} = \frac{\pi}{۲} i e^{-۱}.$$

برای هر $z \in C_R$ داریم
$$|f(z)| = \left| \frac{ze^{iz}}{(z^{۲}+۱)^{۲}} \right| \leq \frac{|z||e^{iz}|}{(|z|^{۲}-۱)^{۲}} \leq \frac{R \times ۱}{(R^{۲}-۱)^{۲}},$$
(توجه کنید چون $y \geq ۰$ داریم $|e^{iz}| = |e^{i(x+iy)}| = |e^{-y}e^{ix}| = e^{-y} \leq ۱$). پس
$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz \right| \leq \frac{R}{(R^{۲}-۱)^{۲}} \pi R.$$

در نتیجه چون وقتی $R \to +\infty$ طرف راست عبارت بالا به صفر میل می‌کند، پس طرف چپ نیز به صفر میل می‌کند و از آنجا نتیجه می‌شود که
$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = ۰.$$

از این رو

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{۲}ie^{-۱} &= \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz \\
&= \lim_{R\to\infty}\left(\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right) \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{(x^۲+۱)^۲}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{(x^۲+۱)^۲}\,dx + i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{(x^۲+۱)^۲}\,dx.
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{(x^۲+۱)^۲}\,dx = \frac{\pi}{۲}e^{-۱}. \qquad \blacksquare$$

مثال ۹۵. *مطلوبست محاسبه‌ی انتگرال*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x^۲+۴x+۵}\,dx.$$

حل تابع $f(z)=\dfrac{e^{iaz}}{z^۲+۴z+۵}$ را در نظر گرفته و انتگرال خطی آن در طول منحنی $\Gamma_R = C_R+\gamma_R$، که در آن C_R نیم‌دایره‌ی بالایی از دایره‌ی $|z| = R$، و γ_R پاره خط $y=۰$، $-R\le x\le R$ است و $R>\sqrt{۵}$، (شکل ۱۵ را ببیند) را محاسبه می‌کنیم. نقطه‌ی $z=-۲+i$ قطب ساده‌ی تابع $f(z)$ در داخل Γ_R است. مانده‌ی $f(z)$ در این نقطه را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\,\{f(z); z=-۲+i\} &= \lim_{z\to-۲+i}(z+۲-i)f(z) \\
&= \lim_{z\to-۲+i}\frac{e^{iaz}}{z+۲+i} \\
&= \frac{e^{ia(-۲+i)}}{۲i} \\
&= \frac{e^{-a}}{۲i}(\cos(۲a)-i\sin(۲a)).
\end{aligned}$$

بنابراین طبق قضیه‌ی مانده‌ها

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz &= ۲\pi i\mathrm{Res}\,\{f(z); z=i\} \\
&= ۲\pi i\frac{e^{-a}}{۲i}(\cos(۲a)-i\sin(۲a)) \\
&= \pi e^{-a}(\cos(۲a)-i\sin(۲a)). \qquad (۶)
\end{aligned}$$

از طرف دیگر برای هر $z\in C_R$، چون

$$|z+۲-i| \ge |z|-|-۲+i| = |z|-\sqrt{۵} = R-\sqrt{۵}$$
$$|z+۲+i| \ge |z|-|۲+i| = |z|-\sqrt{۵} = R-\sqrt{۵}$$

و هم‌چنین $|e^{iz}| = |e^{i(x+iy)}| = |e^{-y}e^{ix}| = e^{-y} \leq ۱$ (چون $y \geq ۰$)، داریم

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{iz}}{z^۲ + ۴z + ۵}\right| \leq \frac{|e^{iz}|}{(R - \sqrt{۵})^۲} \leq \frac{۱}{(R - \sqrt{۵})^۲}.$$

پس

$$\left|\int_{C_R} f(z)\, dz\right| \leq \frac{۱}{(R - \sqrt{۵})^۲}\pi R.$$

در نتیجه چون وقتی $R \to +\infty$ طرف راست عبارت بالا به صفر میل می‌کند، پس طرف چپ نیز به صفر میل می‌کند و از آنجا نتیجه می‌شود که

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = ۰.$$

از این رو با استفاده از رابطه‌ی (۶) داریم

$$\begin{aligned}
\pi e^{-a}(\cos(۲a) - i\sin(۲a)) &= \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\int_{C_R} f(z)\, dz + \int_{\gamma_R} f(z)\, dz\right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^۲ + ۴x + ۵}\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^۲ + ۴x + ۵}\, dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^۲ + ۴x + ۵}\, dx.
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^۲ + ۴x + ۵}\, dx = -\pi e^{-a} \sin ۲a. \quad \blacksquare$$